



FA 6 B 543

GEOMETRIÆ

PARS VNIVERSALIS,

Inseruiens

Quantitatum Curvarum transmutationi & mensuræ.

AVTHORE

IACOBO GREGORIO

ABREDONENSI

SCOTO.



PATAVII, MDCLXVIII.

Typis Heredum Pauli Frambotti, *Superiorum Perm.*
CVM PRIVILEGIO.



Vigano' FA 6B 543



PROŒMIUM



Obſervatum eſt à noſtri ſeculi geometris mathematicam ab antiquis male fuiſſe diviſam in geometriam, arithmetiſcam, &c, ſed potius in uniuerſalem & particularem: Matheſeos pars uniuerſalis tractat de proportionibus in communi abſtrahendo ab omni quantitatis ſpecie, quæ communiter (etiã ſi fortassis abuſive) geometria appellatur, cui affinis eſt recentiorum analytica: matheſeos pars particularis diuiditur; in geometriam propriè ſic dictam, quæ nihil aliud eſt niſi matheſeos pars uniuerſalis figuræ reſtriſcta; in arithmetiſcam, quæ eadem eſt matheſis uniuerſalis numero, et ſtaticam, quæ eadem eſt motui reſtriſcta, &c. ego (ni fallor) idem video in geometria: cum enim obſervarem generaliſſimos analyſeos canones omni problemati inſervire, dummodo poſſibile ſit illos applicare, & analyſem nihil aliud eſſe niſi examinationem quantitatum ignotarum, donec tandem reducantur ad æquationes cum quantitibus cognitis; cogitabam analyſeos defectum (quæ præcipuè apparet in menſuratione

t 2 quan.

quantitatum curvarum) posse aliquatenus suppleri; si modo
e data cuiuscunque figuræ proprietate essentiali, daretur me-
thodus eam transmutandi in aliam æqualem cognitæ proprie-
tates habentem, & huius in aliam, & sic deinceps, donec
tandem transmutatio fiat in aliquam quantitatem cognitam;
sic enim exhiberetur quantitatis propositæ mensura quæsitæ,
non secus quam in æquationis analyticæ resolutione. neque
existimo meam opinionem esse frustratam, puto enim hunc tra-
ctatulum continere geometriæ partem adeo uniuersalem, ut
nullam respuat particularem figuram eorum generum, quæ a
geometris adhuc contemplata sunt; quod si alia figurarum ge-
nera contemplanda sibi proponant, promouenda est hæc scien-
tia; sicut enim figurarum genera sunt infinita, etiam hæc geo-
metriæ pars, sicut omnis alia, infinita erit; nihilominus mul-
to breuius & elegantius erit uniuersalem doctrinam unicui-
que particulari casui secundum figuræ proprietates applicare,
quam de unaquaque figura integrum uolumen euulgare.
Huius methodi studiosus ante omnia versatus esse debet in
analyse, nam absque illa, cuiusvis ingenii vires superat,
propositæ cuiuscunque figuræ proprietates examinare.

Non diffiteor me legisse apud præstantes geometras multa
talis methodi vestigia, sed plerumque vel particulariter vel
parum geometricè demonstrata; quæ mea sunt & quæ aliena
iudicet lector, qui hunc tractatulum cum aliorum compara-
uerit, ego enim nihil affirmo, ne videar ea mihi adscribere
quæ ab alijs (me etiam inscio) antea reperta sunt. Demon-
strandi methodo utor (ni fallor) mihi peculiari, quippe multo
bre-

breuiore quam Archimedeae & non minus geometrica; utor quoque in propositionibus magis obuiis methodo Caualleriana, quæ etiam nullo negotio reducitur ad Archimedeam vel nostram. Quod si geometra, post diligentem huius methodi applicationem secundum figuræ proprietates, nullum inueniat problematis exitum; recurrendum est ad seriem conuergentem, cuius terminatio sit ipsa figura incognita vel alia ad eam in ratione data; ob hanc enim rationem, conatus sum aliarum figurarum proportionem reducere ad proportionem inter figuras planas, in his enim existimo faciliorem esse serierum conuergentium doctrinam: non tamen audeo affirmare, seriem conuergentem semper posse inueniri; suspicor enim hanc methodum esse insufficientem ad omnes proportionem non analyticas inueniendas: utcumque nostrum tractatulum de vera circuli & hyperbolæ quadratura volumus esse vltimum nostræ methodi refugium, nam serierum conuergentium doctrina est generalis, quæ e figuræ proprietatibus semel inuenta solutionem possibilem exhibebit; & proinde obiectionibus contra nostram doctrinam hic satisfaciamus.

Primo obiicitur contra titulum, nempe tractatum meum male appellari veram circuli & hyperbolæ quadraturam, cum potius sit conatus demonstrandi illam esse impossibilem; respondet, si esset impossibilis, nulla daretur proportio inter circulum & diametri quadratum, & ideo falsa esset definitio lib. 5. Euclidis; si autem sit possibilis, monstrandus est nostræ error, si nostræ vera non sit. Alii sic obiiciunt: hæc quadratura nulla est, quoniam non assignatur proportio inter cir-

culum & diametri quadratum; huic obiectioni respondeo
 posito circuli diametro b , erit ipse circulus terminatio seriei
 convergentis, cuius primi termini sunt $\frac{b^2}{2}$, b^2 , & secundi

$$\sqrt{q} \frac{b^4}{2}, \frac{2b^4}{b^2 + \sqrt{q} 2b^2} ; \text{ \& proinde quadratum diametri est ad}$$

circulum ut b^2 ad prædictam terminationem, quæ terminatio
 nobis nullo modo est magis incognita quam radix surdesolida
 numeri 40. dicunt alii non bene esse demonstratum (in scholio
 prop. 5) sectorem $ABIP$ eundem esse cum terminatione seriei
 convergentis, cuius primi termini sunt triangulum ABP &
 trapezium $ABFP$, & secundi, rectilinea $ABIP$, $ABDLP$:
 & proinde plenam demonstrationem hic subicio : si sector &
 prædicta terminatio non sunt æquales, sit inter illas differen-
 tia Z ; & producaturs series convergens donec terminorum
 convergentium (nempe P & Q) differentia sit minor quam
 Z , evidens enim est (ex prop. 6.) hoc fieri posse ; hisce positis,
 patet tam sectorem quam seriei terminationem consistere inter
 terminos P & Q ; & proinde quatuor sunt quantitates,
 quarum maxima & minima sunt P & Q , intermediae au-
 tem sector & terminatio seriei, eritque differentia intermedia-
 rum nempe Z maior quam differentia extremarum, quod
 est absurdum, nulla ergo est differentia inter sectorem & seriei
 terminationem, & proinde æquales sunt, quod demonst-
 randum erat. Alii obijciunt contra prop. 11. ita ; si addatur
 23 termino a^3 ✚ a^2b & termino ba^2 ✚ b^2a , enervetur vis
 utriusque demonstrationis ; respondeo 23 esse quantitatem in-
 defi-

definitam & alias quantitates indefinitas præter ipsos terminos conuergentes compositionem non possit ingredi, quod analytici latere non potest. Obiiciunt alii: hac eadem methodo potest demonstrari inter duas quantitates indefinitè commensurabiles P, Q , non posse inueniri mediam proportionalem illis commensurabilem, quod tamen est falsum si P, Q , sint planosimiles: respondeo maximam esse discrepantiam inter radicem extractionem & sextam illam operationem, nam in radicem extractione, cum diuisor diuidendum metitur, quod in prædicto casu euenit, radicis extractio coincidit cum quatuor operationibus prioribus, sexta autem operatio, cum ex natura sua sit infinita, cum prioribus nunquam coincidit. Obicit quidam non vulgaris geometra circuli quadraturam ope quadraticis peractam esse operationibus analyticis; quod omnino nego desiderando ab affirmante, ut illas operationes analyticas assignet, ego enim existimo basem quadraticis non esse magis assignabilem ab operationibus analyticis, quam radicem quadratam binarij à primis quatuor operationibus arithmeticis.

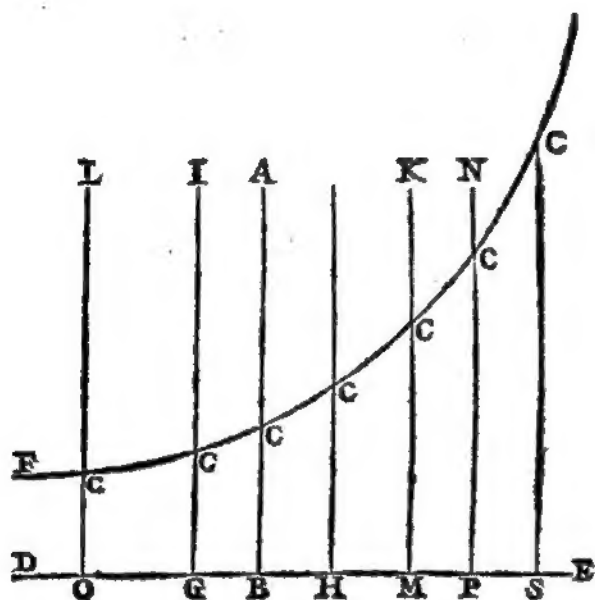
Solutis obiectionibus quæ contra nostram doctrinam vel ab aliis afferantur vel a me imaginari possunt, satisficiamus etiam illis, qui operationibus organicis delectantur. Si quis velit organicè circulum quadrare vel angulum in ratione data diuidere, non existimo ullum modum esse simpliciorē quam vulgaris linea quadratrix in materia aliqua solida & plana accurate & punctatim descripta. Quod ad quadraturam hyperbolæ attinet, existimo satis facile esse trian-

guli,

guli, seu trapezij inscripti (sunt enim inter se equalia) ad
 triangulum circumscriptum rationem in rectis exhibere, &
 ab illis rectis seriem debitam conuergentem continuare, donec
 conueniens fuerit approximationem adhibere. Omnia quæ de-
 siderari possunt de logarithmis & rationum compositione ope-
 sequentis curuæ nullo negotio inueniri possunt.

Sit linea recta DE , sitque alia recta illi normaliter insi-
 stens AB , in qua sit punctum mobile C , quod punctum C mo-
 ueatur ea ratione, ut, dum perpendicularis mouetur eversus
 E vel D normaliter semper insistens rectæ ED , intercepta
 inter punctum C & rectam DE sint ad ipsam CB in rationi-
 bus inter se multiplicatis in ratione motus rectæ perpendicula-
 ris AB : e.g. moueatur AB in KM & NP , oportet ut pun-
 ctum C moueatur ea lege, ut ratio CP ad CB sit multiplicata
 rationis CM ad CB in ratione PB ad MB : eodem modo
 ad partes D , supposito AB moueri in IG & LO , ut pun-
 ctum C ea lege moueatur, ut ratio CO ad CB sit multiplicata
 rationis CG ad CB in ratione OB ad GB : atque è recta DE
 & duobus punctis curuæ quæsita a motu puncti C descriptæ
 ad libitum datis, facile est curuam ipsam punctatim describe-
 re, e.g. supposito curuam in rectis AB , & KM , transire per
 punctum C , oportet alia huius curuæ puncta inuenire: diui-
 datur BM bifariam H , sitque perpendicularis HC media
 proportionalis inter BC , MC : dico C esse unum ex punctis
 quæsitis, est enim ratio CM ad CB duplicata rationis CH
 ad CB , & recta MB est dupla rectæ BH , est igitur C in
 curuâ quæsita. Deinde sit recta SM equalis rectæ MB , &

ut CB ad CM ita CM ad perpendicularem CS , ut prius demonstratur C esse punctum curvae quæsita; atque hac ratione possunt inueniri puncta quotlibet, & curua quantumlibet produci. Notanda sunt quaedam huius curua proprietates exi-



mia, quae nullo negotio deprehenduntur; prima est, quod ex utraque parte possit produci in infinitum; secunda, quod ex una parte nempe F , licet rectam ED semper magis appropinquet, nunquam tamen cum illa concurrat, efficiens spatium ex parte FD finitum in quantitate etiam si infinitum in
lon-

longitudine $\bar{}$ tertia, quod, posita una perpendicularium seu ordinatim applicatarum loco unitatis, & reliquis loco numerorum, intercepta recta in DE seu curva asymptota inter unitatem & numerum semper sit logarithmus numeri; e.g. posita CO unitate & CG binario, item CB ternario, CH quaternario, &c; erit OG logarithmus binarii, OB ternarii, OH quaternarii, &c. Si describatur hæc curva exacte in plano solido, non solum eius ope cum regula & circino inuenientur inter datas duas rectas quocunque medie proportionales, sed omnia problemata imaginabilia de rationum compositione etiam facile perfici possunt; sed hæc, quoniam facilia sunt, consulto omitto, lectorem interim admonens spatium, contentum à portione prædictæ curvæ, sua asymptota & duabus ordinatim applicatis, non habere rationem analyticam ad rectangulum illi inscriptum, sicut demonstrari posset secundum tenorem prop. 11. prædicti tractatuli.

Hæ operationes non existimari debent geometricæ, quoniam sola ope regule & circini non perficiuntur, sicut optime obseruat subtilissimus Mathematicus D. Carolus Renaldinius in geometra suo promoto, dum tractat de nouis illis lineis, quas Mediceas appellat; quod ut clarius fiat, hic conabor ostendere nullam vel equationem cubicam posse resolui ope solius regule & circini: omnis æquatio cubica habet vel unam solam vel tres radices reales, quæ si inuenirentur ope solius regule & circini, seu intersectione circuli & lineæ rectæ, linea recta circulum secaret vel in uno
solo

solo puncto vel in tribus, quod utrumque est absurdissimum: ob similem etiam rationem, equatio cubica tres habens radices reales nunquam potest reduci ad puram, que unicam tantum habet: nam in his equationis reductio nullo modo proficiet, cum impossibile sit eius ope radicem imaginariam in realem mutare vel è contra.



METHO-

METHODVS^I VNIVERSALIS

Transmutandi, & mensurandi quantitates curvas;



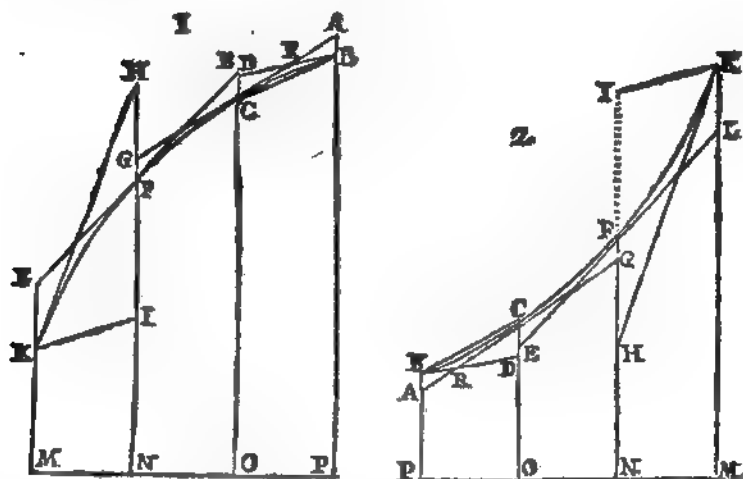
PROP. I. THEOREMA:



It curva quæcunque KB simplex & non sinuosa, hoc est à K ad B, rectam quandam positione datam MP semper appropinquas, vel semper ab illa recedens. Sit (in prima figura) punctum in curva KB rectæ MP maxime propinquum, K ex duobus quibuscunque punctis curvæ KB, nempe C, B, demittantur perpendicularis CO, BP, in rectam MP, & à puncto curvæ C, utpote puncto K proximior ducatur recta CA curvam tangens in C, & PB productæ occurrens in A. dico rectam CA maiorem esse curvæ CB, curvam tangens in B, & rectæ CA occurrens in R, & OC productæ in D, ducatur recta BRD. quoniam in progressu a K ad B, curva KB semper magis elongatur a recta PM, igitur recta BD curvam tangens in puncto B, & vergens versus K e contra tendit ad concursum cum recta PM, & ideo angulus ABR est obtusus, superans nempe rectum MPB illo angulo, in quo cum PM producta concurrat, est igitur angulus ABR major angulo RAB, & latus AR maius latere BR, & commune addendo, recta AC maior est rectis BR, RC. sed BR, RC, curvam tangentes in punctis B, C, sunt maiores arcu BC, & ideo AC recta eodem arcu CB est multo maior, quod demonstrare oportuit.

A Se

Secundo dico BD rectam minorem esse curva BC . ex h^{is} a^{xi}omatibus demonstratis, angulus ABD est obtusus; & proinde etiam, ob parallellas AP, DO , illi æqualis CDB , & ideo ducto subtendente CB , angulus BCD maior est angulo BCD , & recta DB minor recta BC , sed recta BC minor est curva BC , & ideo recta BD multo minor est curva BC . ex



punctis extremis K, B , in rectam MP demittantur perpendiculares KM, BP ; deinde diuidatur recta MP in partes quotcunque æquales MN, NO, OP , & à punctis P, O, N, M , erigantur perpendiculares PA, OE, NH, ML , curuam secantes in punctis B, C, F, K , in quibus singulis ducantur rectæ curuam tangentes versus B a perpendicularibus proximis terminatæ, nempe KH, FE, CA , & in puncto B sit tangens BD a perpendiculari proxima versus K terminata in D , sitque rectæ BD parallella KI : manifestum est KH maiorem esse recta KI ob angulum HIK obtusum æqualem angulo ABD .

Dico omnes rectas KH, FE, CA , simul maiores esse curva KB

KB & excessum rectæ HK supra rectam KI maiorem esse excessu omnium rectarum KH, FE, CA, simul supra curvam KB. producantur tangentæ AC, EF, ad proximas perpendiculares versus K in G & L. ex primo proposito, AC est maior curva BC, EF maior curva FC, & HK maior curva KF; & ideo omnes simul KH, FE, CA, sunt maiores integra curva KB; deinde ex secundo proposito BD, hoc est, KI minor est curva BC; & CG, hoc est, CA minor est arcu FC; & LF, hoc est, FE minor est arcu KF; & ideo omnes KI, FE, CA, simul sunt minores integra curva KB; & ideo maior est excessus rectarum KH, FE, CA, supra rectas KI, FE, CA, quam supra curvam KB; sed rectæ FE, CA, sunt communes utrique rectarum summæ; & ideo excessus rectæ KH supra rectam KI est æqualis excessui summæ rectarum KH, FE, CA, supra summam rectarum KI, FE, CA; qui demonstratus est maior excessu rectarum KH, FE, CA, supra curvam KB, quod demonstrandum erat. Si vera curva fuerit convexa ad rectam MP, ut in secunda figura, K debet esse punctum curvæ a recta MP maxime remotum, & aliquot demonstrationū verba sunt mutanda, sicut per se intelliget industrius Lector.

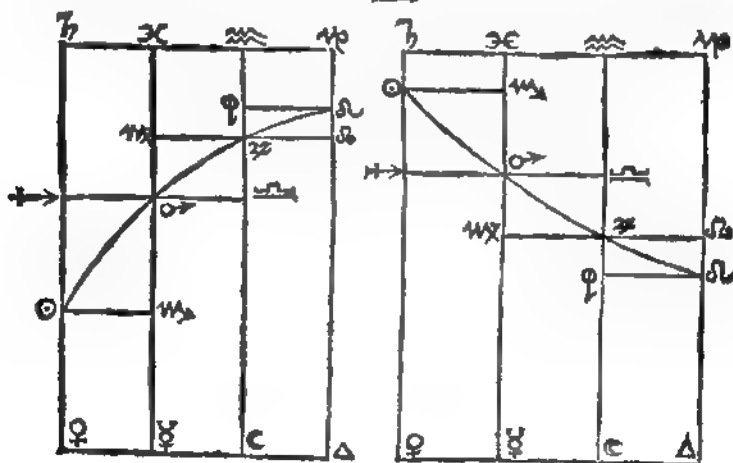
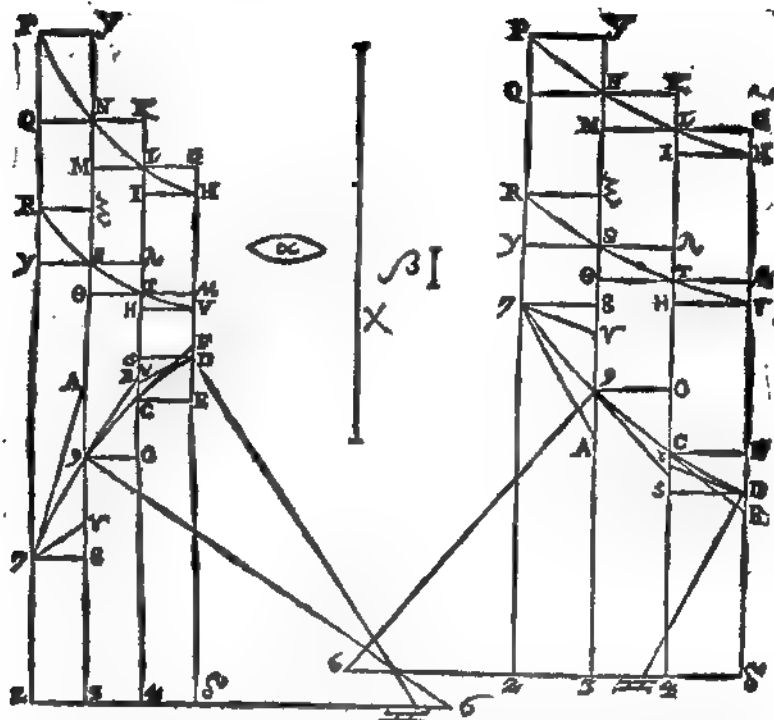
PROP. 2. THEOREMA.

Sit curva quæcumque 79 CD simplex, seu non sinuosa (si enim fuerit sinuosa, oportet illam in plures simplices dividere) super qua imaginetur superficies cylindrici recti, cuius altitudo recta X. a puncto quolibet curvæ nempe 9 in quamlibet rectam nempe 26 demittatur recta perpendicularis 93. & ducatur in eandem 26 recta 96 curvam perpendiculariter secans in puncto 9. producatu recta 39 in S, ut 3S fiat æqualis rectæ 96, idem quoque supponatur fieri in omnibus punctis curvæ 79 CD, ita ut ex rectis in curvam perpendicularibus per propria sua curvæ puncta ad rectam 26 normaliter protractis confectur spatium RV J2 à

A 2 curva

curva RSTV & rectis R 2, V 3, 3, comprehensum. Deinde
 fiat ut 93 ad S3 ita X altitudo cylindrici ad 3 N; idem fieri
 supponimus in omnibus aliis rectis spatii RV 3 recte 28 per-
 pendicularibus, ut compleatur spatium PH 3 comprehen-
 sum a curva PH & rectis H 3, P 2, 28 hoc est intelligo duo
 mixtilinea esse descripta, quorum primi hæc est proprietas,
 ut ex eius curvæ puncto quocunque S in rectam 26 demissa
 perpendicularis S3 sit æqualis perpendiculari ad curvam 79
 CD in puncto transitus 9 nempe 96. secundi vero hæc sit
 proprietas, ut ex eius curvæ puncto quocunque N in rectam
 26 demissa perpendicularis N3 sit ad altitudinem cylindrici
 X, ut eius pars intercepta in primo mixtilineo S3 ad eius
 partem interceptam à curva data 93. dico mixtilineum se-
 cundum PH 3 esse æquale superficiei cylindrici recti, cuius
 basis est curva data 79 CD, & altitudo recta X. Si mixtili-
 neum PH 3 non est æquale superficiei cylindrici prædicti,
 inter illas erit aliqua differentia, quæ sit æ planum: applice-
 tur æ planum ad rectam X, sitque latitudo inde oriens β . du-
 catur ex puncto 7 recta 7 A curvam 7 D tangens in puncto 7,
 & ex puncto D ducatur recta Dg curvam tangens in pun-
 cto D, sitque recte Dg parallela 7v, & ex punctis 7, D, in
 rectam 26 demittantur perpendiculares 72, 3D; dividatur-
 que recta 28 in tot partes æquales, ut ab extremitate ear-
 um primæ erecta perpendiculari 3 A, excessus tangentis
 abscissæ 7 A supra parallellam abscissam 7v sit minor recta
 β , hoc enim semper fieri posse manifestum est, si tangens
 7 A non sit perpendicularis recte 28, nec curva data sinuosa.
 a divisionum punctis 2, 3, 4, 3, excitentur perpendiculares
 2P, 3N, 4L, 3H, curvam datam secantes in punctis 7, 9,
 C, D; curvam primam inventam secantes in punctis R, S, T, V,
 & secundam in punctis P, N, L, H; deinde curvam datam tan-
 gentes in punctis 7, 9, C, D, ducantur rectæ 7A, 9B, CF, Dg,
 a proximis perpendicularibus terminatæ, sintque rectæ 78,
 90, CE, D5, YP, NK, LG, HI, LM, NQ, ipsiis partibus æquali-
 bus

bus æquales & parallele, à perpendicularibus proximis terminatæ. Angulus B 96 est rectus ob 9 B tangentem, & illi perpendiculararem 96; angulus quoque O 93 est rectus, & ideo communem angulum O 96 auferendo, relinquitur angulus O 9 B æqualis angulo 693; triacula igitur rectangula O9B, 693, sūt similia, & proinde ut 93 ad 96 ita 9O ad 9B, sed ut 93 ad 96 ita X ad 3N; & ideo ut 9O ad 9B ita X ad 3N; & igitur rectangulum 9 O in 3N nempe rectangulum N4 est æquale rectangulo 9B in X; eodē modo demonstratur rectangulum P 3 esse æquale rectangulo 7 A in X, item rectangulum Lδ esse æquale rectangulo CF in X; & ideo rectangulum rectæ X in rectas 7 A, 9 B, CF, simul, est æquale toti rectilineo 2PYNKLGD; est ergo rectangulum X in rectas 7 A, 9 B, CF, simul, maior mixtilineo PNLHδ2, curvæ in puncto D fiat normalis Dπ, & ideo rectus est angulus πDδ, sed rectus quoque est angulus δD5, & proinde commune auferendo, nempe δDδ, relinquūtur anguli æquales δDπ, δD5; sunt ergo triacula rectangula δDπ, δD5, similia; & ideo ut δD ad Dπ, hoc est D5 ad Dδ ita X ad δH, & ideo rectangulum δH in D5, hoc est rectangulum H4, æquale est rectangulo X in Dδ, hoc est, X in 7 γ; sed rectangulum M4 est æquale rectangulo L δ, hoc est rectangulo X in CF; & rectangulum Q3 est æquale rectangulo N4, hoc est rectangulo X in 9 B; & igitur rectilineum QNMLIHδ2 est æquale rectangulo X in rectas FC, B9, γ7, simul; est ergo rectangulum X in rectas FC, B9, γ7, simul, minor mixtilineo PNLHδ2. porro rectæ FC, B9, A7, simul, sunt maiores curva 79CD, & rectæ FC, B9, γ7, simul, sunt eadem curva minores, quod utrumq; patet ex antecedente; & igitur rectangulum X in rectas FC, B9, A7, maius est cylindrica superficie super curva 79CD, & rectangulum X in rectas FC, B9, γ7, eadem superficie minus: sed demonstratum est rectangulum X in rectas FC, B9, A7, maius esse mixtilineo PNLHδ2, & rectangulum X in rectas FC, B9, γ7, eodem mixtilineo esse minus; &
pro-



proinde maior est differentia inter hæc rectangula, quàm inter superficiem cylindricam & mixtilineum; sed rectangulorum differentia est rectangulum X in differentiam rectarum $7A$, $7V$; est autem differentia rectarum $7A$, $7V$, minor recta β ex suppositione; & ideo differentia inter rectangula X in FC , $B9$, $A7$, simul, & X in FC , $B9$, $V7$, simul, minor est quantitate α , nempe facto ab X in β , hoc est ex positione, differentia inter superficiem cylindricam & mixtilineum, quod est absurdum, ostensa enim est maior, superficies igitur cylindrica & mixtilineum sunt æqualia, quod demonstrandum erat.

Quod si curua $7D$ non fuerit simplex sed sinuosa, dividenda est in plures simplices, & demonstratio in vnaquaque seorsum instituenda.

Si vero rangens $7A$ fuerit perpendicularis ad rectam 78 , mixtilineum $PNLH\delta_2$ extendetur in infinitum ad partes P : hoc tamen non obstante; dico adhuc mixtilineum $PNLH\delta_2$ æquale esse superficiæ cylindricæ recti super curua $79CD$, cuius altitudo X . Si non sunt æqualia, sit (si fieri potest) mixtilineum maius superficie, & recta $N3$ rectæ $H\delta$ parallela abscindatur mixtilineum $NLH\delta_3$ æquale superficiæ super curua $79CD$, hoc enim absque dubio fieri potest: eodemque modo, quo ante, demonstratur mixtilineum $NLH\delta_3$ æquale esse superficiæ super $9CD$; sunt ergo æquales, superficies cylindricæ recti cuius altitudo X , super curvis $9CD$, $79CD$, quod est absurdum; mixtilineum ergo $PNLH\delta_2$ non est maius dicta superficie cylindrica: sit (si fieri potest) minus; & abscindatur $9D$ curua, ita ut superficies cylindricæ recti super $9D$ existens, æqualis fiat mixtilineo $PNLH\delta_2$, & ducatur $39N$ rectæ $H\delta$ parallela: demonstratur ut ante superficiem cylindricæ recti super $9D$ existentem, æqualem esse mixtilineo $NLH\delta_3$; sed ex suppositione eadem superficies cylindricæ recti æqualis est mixtilineo $PNLH\delta_2$; mixtilinea ergo $PNLH\delta_2$, $NLH\delta_3$ sunt inter se æqualia, quod est absurdum; & ideo mixtilineum non est minus superficie, sed.

Ted etiam demonstratum est, nec esse maius, superficies igitur cylindrici recti super curva 7D cuius altitudo est X, æqualis est mixtilineo PNLHδ2, etiam quando tangens 7A rectæ 78 est perpendicularis, quod demonstrandum erat.

Ex demonstratione manifestum est mixtilineū PNLHδ2 & superficiem cylindricam super curva 79CD esse quantitates magnitudine & gravitate analogas, quoniam eadem æqualitas quæ demonstratur de integris, eodem modo demonstratur de partibus earum proportionalibus; & ideo earum centra æquilibrii eodem modo dividunt rectam 2δ; sed ipsa curva 7D est magnitudine & gravitate analoga cum superficie cylindrica; & ideo curva est etiam magnitudine & gravitate analoga cum mixtilineo idem cum reliquis centrum habens æquilibrii in recta 2δ. perspicuum quoque est mixtilineum PNLHδ2 esse ad rectangulum X. in 2δ, ut curva 79 CD ad rectam 2δ.

P R O P. 3. T H E O R E M A.

Eisdem positis quæ prius; supponatur prædicta superficies cylindrici recti super curva 79DC secari a plano per rectam 2δ transeunte, & in angulo semirecto ad planum Dδ2 inclinante. inferiorem superficiem cylindricæ partem a plano sectam appellamus trunci superficiem. Dico trunci superficiem æqualem esse mixtilineo RSTVδ2. supponatur extendi curva 79CD in rectam sibi æqualem 79⊙Δ, & iungatur recta Δ79 æqualis rectæ X, ut compleatur rectangulum 79⊙Δ79, quod necessario æquale est tam superficiem cylindrici quam mixtilineo PNLHδ2. Sit 79⊙ æqualis rectæ 27, & a puncto 79 ducatur curva 79⊙⊙ talis naturæ, ut sumpta recta quacunque 79⊙⊙ equali curvæ particulæ cuiusque nempe 79, perpendicularis ad rectam 79⊙ ex puncto 79 in curvam 79⊙⊙, nempe 79⊙⊙, fiat æqualis perpen-

perpendiculariter puncto g in rectam ad , nimirum g : manifestum
 est mixtilineum $g \sigma \pi \Omega \Delta \rho$ esse æquale superficiæ trunci,
 quoniam inclinatio plani secantis supponitur esse angulus
 femirectus: nostrum ergo est demonstrare æqualitatem mix-
 tilineorum $RSTV\delta$, $g \sigma \pi \Omega \Delta \rho$: primo nos hanc æquali-
 tatem demonstrabimus in postremis figuris, ubi supponimus
 curvam RV in progressu ab R ad V rectam ad semper magis
 appropinquare, & etiam curvam γD in progressu a γ ad D
 ad eandem rectam magis appropinquare; & ideo curva $g \Omega$
 in progressu a g ad Ω eo magis appropinquat rectam $\rho \Delta$,
 quoniam eodem modo appropinquat curva $g \Omega$ rectam $\rho \Delta$,
 quo γD rectam ad . Si prædictæ mixtilineæ non sunt æqua-
 liæ, sit inter illas differentia: & mixtilineum $RV\delta$ diuida-
 tur à tot rectis rectæ R parallellis, nempe $S_3, T_4, V\delta, R_2$,
 ut ab earum cum curva intersectionibus R, S, T, V , utrinque
 ductis ad parallelas proximas perpendicularibus $R\xi, S\gamma, T\lambda,$
 $T\theta, T\mu, V\eta$, fiant duo rectilinea, nempe $R\xi S\lambda T\mu \delta$ extra
 mixtilineum & $\gamma S\theta T\eta V\delta$ intra mixtilineum, quorum dif-
 ferentia sit minor quam α , evidens enim est hoc fieri posse.
 producantur rectæ S_3, T_4 , ut utrasque curvas $PH, \gamma D$ inter-
 secant in punctis N, L, g, C , & iungantur parallellæ, rectæ
 $ad, PY, NQ, NK, LM, LG, HI$, a rectis mixtilineum dividen-
 tibus terminatæ. Deinde dividatur rectangulum $\eta \Delta$ a re-
 ctis, rectæ $\eta \Delta$ parallellis, $\eta \rho, X \rho, \pi \rho, \eta \Delta$, in rectangulū
 $\eta \rho$ æquale mixtilineo PN_3 , rectangulum $X \rho$ æquale
 mixtilineo NL_4 , & rectangulum $\pi \rho$ æquale mixtilineo
 $LH\delta$. & ab intersectionibus rectarum rectangulum $\eta \Delta$ di-
 videndum cum curva $g \Omega$, nempe g, σ, π, Ω , ducantur per-
 pendiculares utrinque in dividentes proximas, nempe $g \sigma,$
 $\sigma \pi, \pi \Omega, \pi \rho, \pi \Omega, \Omega \rho$, ita ut $\pi \sigma \pi \rho \Omega \rho$ fiat rectilineum
 intra mixtilineum, & $g \sigma \sigma \pi \pi \Omega \Delta \rho$ fiat rectilineum ei-
 dem mixtilineo circumscriptum. Patet ex antecedente P_2
 esse ad X seu $\eta \rho$, ut R_2 ad γ seu $g \rho$, & permutando ut P_2
 ad R_2 ita $\eta \rho$ ad $g \rho$; & ideo ut P_3 ad R_3 ita $\eta \rho$ ad $g \rho$; sed

B

re-

rectangulum \overline{PQ} est æquale mixtilineo $P N_3 2$; & ideo per-
 mutando, ut P_3 ad mixtilineum ita R_3 ad \overline{PQ} , cumque P_3
 sit maior mixtilineo, erit R_3 maior quam \overline{PQ} : eadem me-
 thodo demonstratur S_4 rectangulum esse maius quam \overline{PQ} ,
 & T_4 maius quam \overline{PQ} ; est ergo rectilineum $R \xi S \lambda T \mu \delta_2$ ma-
 ius rectilineo \overline{PQ} ; Eodem modo ut N_3 ad X seu
 $X \overline{P}$ ita S_3 ad 9_3 seu \overline{PQ} , & permutando, ut N_3 ad S_3 ita
 $X \overline{P}$ ad \overline{PQ} , hoc est ut Q_3 ad 7_3 ita \overline{PQ} seu mixtilineum $P N$
 3_2 ad \overline{PQ} , & permutando ut Q_3 ad mixtilineum $P N_3 2$ ita
 7_3 ad \overline{PQ} , sed Q_3 est minus mixtilineo, & ideo 7_3 est minus
 quam \overline{PQ} ; eodem modo demonstratur θ_4 esse minus quam
 \overline{PQ} , & κ_4 minus quam \overline{PQ} ; & ideo rectilineum $\gamma \theta T \eta V \delta_2$
 minus est rectilineo \overline{PQ} ; & proinde ambo rectili-
 nea $R \xi S \lambda T \mu \delta_2$, $\gamma \theta T \eta V \delta_2$, hoc est maius priorum
 rectilineorum minus est maiore secundorum, & minus prio-
 rum maius minore secundorum; sed mixtilineum \overline{PQ}
 $\Delta \varphi$ consistit inter duo priora, & ideo consistit etiam inter
 duo posteriora nempe $R \xi S \lambda T \mu \delta_2$, $\gamma \theta T \eta V \delta_2$, sed mix-
 tilineum $R S T V \delta_2$ consistit etiam inter hæc rectilinea, &
 proinde maior est differentia rectilineorum $R \xi S \lambda T \mu \delta_2$,
 $\gamma \theta T \eta V \delta_2$, quam mixtilineorum $R S T V \delta_2$, \overline{PQ}
 $\Delta \varphi$; sed ex positione differentia rectilineorum est minor quam κ_4
 & proinde differentia mixtilineorum est multo minor quam
 κ_4 , quod est absurdum; ponitur enim æqualis; non igitur
 differunt mixtilinea $R S T V \delta_2$, \overline{PQ}
 $\Delta \varphi$, sed æqualia
 sunt, quod demonstrare oportuit.

Secundo nos eandem æqualitatem demonstrabimus in
 primis figuris, ubi supponimus curvam $R V$ in progressu ab
 R ad V rectam 2δ semper magis appropinquare, & econ-
 tra curvam $7 D$ in progressu a 7 ad D ab eadem recta magis
 elongari; & ideo curva \overline{PQ} in progressu a \overline{PQ} ad \overline{PQ} eo magis
 elongatur a recta \overline{PQ} , quoniam eodem modo elongatur
 curva \overline{PQ} a recta \overline{PQ} , quo curva $7 D$ a recta 2δ . Si prædi-
 cta

tra mixtilinea non sunt æqualia, sit eorum differentia α :
 deinde mixtilinea $RSTV\delta$, $\Theta\sigma\varpi\Omega\Delta\varphi$, dividantur à
 rectis perpendicularibus ad eorum bases 2δ , $\varphi\Delta$, omnino
 ut in antecedente demonstratione factum est, hac tamen
 lege ut differentia rectilinearum $R\xi\varsigma\lambda T\mu\delta$, $\gamma\theta T\eta V\delta$, item
 & differentia rectilinearum $\kappa\sigma\varpi\varphi\Omega\Delta\varphi$, $\Theta\sigma\sigma\omega\varpi\Omega\Delta\varphi$,
 simul, sint minores quantitate α ; manifestum est enim hoc
 esse possibile, cum hæc divisio in infinitum fieri possit. ea-
 dem methodo, qua in priore demonstratione usus sumus,
 demonstratur rectilineum $R\xi\varsigma\lambda T\mu\delta$ maius esse rectilineo
 $\Theta\sigma\sigma\omega\varpi\Omega\Delta\varphi$, & rectilineum $\gamma\theta T\eta V\delta$ minus esse
 rectilineo $\kappa\sigma\varpi\varphi\Omega\Delta\varphi$. Hisce intellectis, si data mixti-
 linea non sunt æqualia, sit $RSTV\delta$ maius altero: manife-
 stum est excessum rectilinei $R\xi\varsigma\lambda T\mu\delta$ supra rectilineum
 $\Theta\sigma\sigma\omega\varpi\Omega\Delta\varphi$ æquale esse omnibus rectangulis $\gamma\xi$, $\theta\lambda$, $\eta\mu$,
 $\kappa\sigma$, $\varpi\omega$, $\varphi\Omega$, simul, sublato excessu rectilinei $\kappa\sigma\varpi\varphi\Omega\Delta\varphi$
 supra rectilineum $\gamma\theta T\eta V\delta$; sed excessus mix-
 tilinei maioris supra mixtilineum minus, est minor dicto
 excessu rectilinearum, quoniam mixtilineum maius est
 minus rectilineo maiore, & mixtilineum minus est ma-
 ius rectilineo minore; & ideo excessus mixtilinei maioris
 supra mixtilineum minus, minor est dictis rectangulis si-
 mul, sublato excessu rectilinei $\kappa\sigma\varpi\varphi\Omega\Delta\varphi$ supra recti-
 lineum $\gamma\theta T\eta V\delta$; sed dicta rectangula simul ex hypo-
 thesi minora sunt quantitate α , & ideo dicta rectangula si-
 mul sublato dicto excessu multo minora sunt quantitate α ;
 & proinde mixtilineum maius excedit minus multo minore
 excessu quam α , quod est absurdum, ponitur enim α ex-
 cessus mixtilinei maioris supra minus; non est ergo mixtili-
 neum $RSTV\delta$ maius mixtilineo $\Theta\sigma\sigma\omega\varpi\Omega\Delta\varphi$: sit (si fieri
 potest) minus; manifestum est excessum rectilinei $\kappa\sigma\varpi\varphi\Omega\Delta\varphi$
 supra rectilineum $\gamma\theta T\eta V\delta$ æqualem esse omni-
 bus rectangulis $\kappa\sigma$, $\varpi\omega$, $\varphi\Omega$, $\gamma\xi$, $\theta\lambda$, $\eta\mu$, simul, sublato ex-
 cessu rectilinei $R\xi\varsigma\lambda T\mu\delta$ supra rectilineum $\Theta\sigma\sigma\omega\varpi\Omega\Delta\varphi$;

B 2 sed

sed excessus mixtilinei maioris $\odot \circ \text{P} \Omega \Delta \text{Q}$ supra mixtilineum minus $\text{RSTV} \delta 2$, est minor dicto excessu rectilineorum, quoniam mixtilineum maius est minus rectilineo maiore & mixtilineum minus est maius rectilineo minore; & ideo excessus mixtilinei maioris supra minus minor est dictis rectangulis simul sublato excessu rectilinei $\text{R} \text{E} \text{S} \Delta \text{T} \mu \delta 2$ supra rectilineum $\odot \circ \text{P} \Omega \Delta \text{Q}$; sed dicta rectangula simul, ex hypothesi, minora sunt quam α ; & ideo dicta rectangula simul sublato dicto excessu multo minora sunt quam α ; & proinde mixtilineum maius excedit minus multo minore excessu quam α , quod est absurdum, ponitur enim α excessus mixtilinei maioris supra minus; non est ergo mixtilineum $\odot \circ \text{P} \Omega \Delta \text{Q}$ maius mixtilineo $\text{RSTV} \delta 2$, sed demonstratum est etiam nec esse minus; sunt igitur mixtilinea $\odot \circ \text{P} \Omega \Delta \text{Q}$, $\text{RSTV} \delta 2$, inter se æqualia, quod demonstrandum erat.

Sunt etiam alii huius theorematism casus, quibus omnibus potest applicari hæc secunda demonstratio; volui tamen priorem etiam adhibere, quoniam mihi apparet simplicior, etiamsi non sit generalis; lectorem tamen admoneo illam priorem posse adhibere in casu maxime ordinario, nempe in figuris prioribus, reliquis manentibus dum curva $\text{R} \text{V}$ in progressu ab R ad V magis a recta 2δ elongatur.

Ex demonstratione manifestum est mixtilineum $\text{RSTV} \delta 2$ & superficiem trunci esse quantitates magnitudine & gravitate analogas, quoniam eadem æqualitas quæ demonstratur in integris, eodē etiam modo demonstratur in partibus earum proportionalibus; & ideo earum centra æquilibrii eodem modo dividunt rectam $\delta 2$.

Non existimo opus esse Lectorem admonere, quod data hac una trunci superficie, dentur omnes aliæ, quarum plana secantia, basem (si opus est) produciē in eadem recta secant, tales enim truncorum superficies inter se sunt ut earum altitudines, vel ut tangentes inclinationum planorum secantium

nifestum enim est hoc fieri posse, quoniam recta RV dividi potest in plures, & adhuc plures partes in infinitum. Producantur rectæ parallellæ $DB, CS, \delta T, ZV$, per curvam propositam in punctis E, G, I, O , & producantur rectæ EL, GM, IN , curvam tangentes in punctis E, G, I, O , ad rectam $L\xi$ in punctis L, M, N, O , quæ parallellas proximas ex utraque parte intersecant etiam in punctis $F, H, N, \omega, \theta, \mu$; & ad parallellas proximas sunt perpendiculares EQ, GK, IP . manifestum est (ob parallelismum rectarum GK, SV) GK esse ad GH ut SV ad GM seu SB , & proinde rectangulum $S\delta$, nempe rectæ GK in SB , æquale est rectangulo GH in SV , sed rectangulum GH in SV maius est portione superficiiei trunci insistente curvæ GI , quoniam GH recta maior est curva GI & recta SV æqualis est maximæ altitudini portionis superficiiei cylindrici insistentis curvæ GI ob planum seminormaliter basem secans per rectam $L\xi$; & ideo rectangulum $S\delta$ maius etiam est portione superficiiei trunci insistente curvæ GI ; eodem modo probatur rectangulum RC maius esse portione superficiiei trunci insistente curvæ GE & rectangulum TZ maius esse superficiiei trunci insistente curvæ OI ; & ideo rectilineum $RDCB \delta YZV$ mixtilineo circumscriptum maius est tota trunci superficie. Deinde ob parallelismum rectarum IP, SV , ut IP ad IN , seu GK vel ST ad θI , ita TV ad IN vel TY ; & proinde rectangulum SY nempe rectæ ST in TY æquale est rectangulo rectæ θI in TV , sed rectangulum θI in TV minor est portione superficiiei trunci insistente curvæ IG , quoniam recta θI minor est curva GI & recta TV æqualis est minimæ altitudini eiusdem portionis superficiiei trunci insistentis curvæ GI , ob planum seminormaliter basem secans per rectam $L\xi$; & ideo rectangulum SY minus est portione superficiiei trunci insistente curvæ GI ; eodem modo probatur rectangulum RB minus esse portione superficiiei trunci insistentis curvæ GE ; & ideo rectilineum $TYXB$ & R mixtilineo inscriptum minus est integra superficie trun-

trunci, sed differentia inter rectilineum inscriptum & circumscriptum minor est quantitate λ ex suppositione; & ideo differentia inter superficiem trunci & figuram mixtilineam multo minor est quam λ , quoniam earum utravis demonstratur maior rectilineo inscripto & minor circumscripto, quod fieri non potest, ponitur enim λ differentia inter superficiem trunci & mixtilineum; nulla igitur est differentia inter figuram mixtilineam & superficiem trunci, & proinde sunt æquales, quod demonstrandum erat.

eisdem positis, sit mixtilineum $VYBD$ 23ξ talis naturæ, ut, a quolibet puncto curvæ EO nempe G ducta parallela rectæ $L\xi$ nempe $G2$, intercepta recta $B2$ inter duas curvas VD , $D\xi$, fiat æqualis tangenti curvam propositam in puncto G protractæ ad rectam AD , nempe rectæ $G\mu$. dico mixtilineum $VYBD$ 23ξ æquale esse superficiem trunci superioris eiusdem prioris cylindrici posita eius altitudine recta RV . rectæ $MG\mu$ in puncto G sit recta normalis $G7$ rectam RV secans in puncto 7 . ob similitudinem triangulorum $SG7$, GKH , ut GS ad $G7$ ita GK ad GH , & ut GK ad GH ita SV ad GM vel SB , & SR ad $G\mu$ vel $B2$; & ideo GS est ad $G7$ ut RV ad $S2$. eodem modo demonstrari potest IT esse ad 18 ut RV ad $T3$; cumque hoc fiat in omnibus punctis curvæ EO , manifestum est ex huius 2 mixtilineum RD 23ξ V esse æquale superficiem cylindrici recti insistenti curvæ EO , cuius altitudo RV ; atque superficies trunci inferioris æqualis est mixtilineo $RVYBD$, & proinde superficies trunci superioris æqualis est mixtilineo $DBYV\xi$ $32D$, quod demonstrare oportuit.

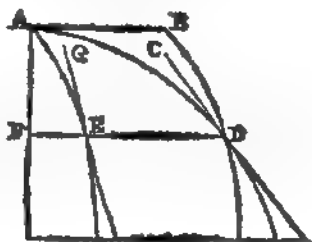
Hinc etiam manifestum est superficiem trunci inferioris & mixtilineum $RVYBD$ esse quantitates magnitudine & gravitate analogas, quoniam eadem æqualitas quæ demonstratur de integris, eodem modo demonstratur de partibus earum proportionalibus. Manifestum quoque est superficiem trunci superioris & mixtilineum $VYBD$ 23ξ esse
quan-

quantitates magnitudine & gravitate analogas; mixtilineum enim $R V \xi \gamma D$ magnitudine & gravitate analogum est toti superficier cylindrici recti, & mixtilineum $R V Y B D$ magnitudine & gravitate analogum est superficier trunci inferioris; & ideo (quod superest) mixtilineum $D B Y V \xi \gamma \gamma D$ analogum est reliquæ superficier trunci superioris, quod &c.

Huius propositionis diversi sunt casus, sed in omnibus eodem modo verificari potest præcedens conclusio.

P R O P. 5. T H E O R E M A.

AD rectam $A F$ ducantur duæ curvæ $A E$, $A D$, & rectæ $A F$ sit perpendicularis rectæ $F D$ curvas secans in punctis E , D , ducanturque rectæ GE , CD , curvas tangentes: Dico rectas EG , DC , non esse parallellas: sint (si fieri po-



rest) parallellæ, & ducatur recta AB parallela & æqualis rectæ ED : deinde per puncta B , D , ducatur curva congruens curvæ AE , si modo punctum A superponatur puncto B & punctum E puncto D : manifestum est curvam BD secare curvam BD , item & rectam CD parallelam rectæ GE tangere curvam AD ; atque CD ex suppositione tangit quoque curvam BD , quod est absurdum, quoniam curvæ AD , BD , se inui-

in vicem secant; rectæ igitur CD , GE , non sunt parallelæ quod demonstrandum erat.

Animadvertendum est nos hactenus loqui de illis curvis simplicibus, quæ (quo longius distant ab A) eo maiorem intercipiunt rectam ED ; nam ex hac suppositione pendet demonstrationis vis.

PROP. 6. PROBLEMA.

Invenire curvam, quæ ad suum axem eandem habeat rationem, quam figura qualibet exhibita ad rectangulum sibi inscriptum, & recta data seu quasita curva axi applicatum.

SIt figura exhibita $ABSO$, rectangulum inscriptum $ABRO$; sitque curva BS simplex seu non sinuosa, si autem sit, dividenda est in plures simplices, & demonstratio seorsim instituenda. deinde sit curva $AFLP$ talis naturæ, ut, ducta recta quacunque IN normali rectæ AO , curvam $AFLP$ secante in L , recta IN sit æqualis potentia utrique IL , IM : deinde ducatur curva $A EKQ$ talis naturæ, ut, ducta recta quacunque IM rectæ AO perpendiculari & curvam $A EKQ$ secante in K & $AFLP$ in L , rectangulum MIL sit æquale mixtilineo $IAFL$. dico figuram $ABSO$ esse ad rectangulum $ABRO$ ut curva $A EKQ$ ad rectam AO . sit in curva $AFLP$ punctum ad libitum K , per quod ducatur recta IN perpendicularis rectæ AO & lineas $AFLP$, BR , $BHNS$, secans in L , M , N , punctis; sitque ut IL ad IM ita IK ad IC & ducatur KC : recta KC curvam AQ secat vel tangit in puncto K ; si fieri potest, eam secet in K , & ideo intra curvam cadet nempe intra punctum E versus verticem A : ducatur per punctum E recta DH rectæ IN parallella lineas AQ , AP , BR , BS , secans in punctis E , F , G , H , & rectam LC in a , item compleatur rectangulum $ILZC$, cuius latus LZ rectam DH secet in X . quoniam IL est ad IM ut IK ad IC , erit rectan-

C gulum

mixtilineo $IDFL$, sed & maius est, quod est absurdum; & proinde recta KC intra curvam AQ non cadit versus verticem: si fieri potest, cadat recta CK intra curvam versus basem reliquis se habentibus ut in priore positione; eritque ut IK ad DE ita mixtilineum $IAFL$ ad mixtilineum $DALF$, at IK ad DE maiorem habet rationem quam ad Da ; & ideo mixtilineum $IAFL$ ad mixtilineum $DALF$ maiorem habet rationem quam IK ad Da seu IC ad DC ; & igitur mixtilineum $IAFL$ ad mixtilineum $DALF$ maiorem habet rationem quam rectangulum IZ ad rectangulum DZ , & inuertendo, per conversionem rationis & rursus inuertendo, mixtilineum $IAFL$ ad mixtilineum $IDFL$ maiorem habet rationem quam rectangulum IZ ad rectangulum IX , & permutando mixtilineum $IAFL$ ad rectangulum IZ maiorem habet rationem quam mixtilineum $IDFL$ ad rectangulum IX , cumque mixtilineum $IAFL$ sit æquale rectangulo IZ , erit rectangulum IX maius quam mixtilineum $IDFL$, sed & minus est, quod est absurdum; non cadit ergo recta CK intra curvam AQ versus basem; & ideo recta KC curvam AQ tangit in puncto K , rectæ CK sit perpendicularis rectæ KT rectæ AO occurrens in T ; manifestum est CI esse ad CK ut IK ad KT ; atque CI est ad CK ut MI ad NI , quoniam rectæ IN , IM , IL , efficiunt triangulum rectangulum simile triangulo CIK , cuius latera IM , IN , sunt homologa lateribus CI , CK ; & proinde ut IK ad KT ita IM ad NI ; cumque hoc eodem modo fiat in omnibus punctis curvæ AQ , manifestum est ex huius 2 rectam AO esse ad curvam AQ ut rectangulum OB ad figuram $ABSO$, quod demonstrare oportuit.

SCHOLIVM.

H Vius propositionis inversum facile quoque demonstratur; nempe, si recta AO sit ad curvam AQ ut rectangulum OB ad figuram $ABSO$, item si curva AP talis

C a fit

fit naturæ ut ducta IN quæcunque AO rectæ perpendicularis æqualeat potentia utrique IL, IM ; erit rectangulum MIK æquale mixtilineo $IAFL$: si non sit ita, ducatur curva AVY talis naturæ ut rectangulum MLV fiat æquale mixtilineo $IAFL$, & demonstrabitur secundum tenorem huius propositionis rectas (quæ curvas AY, AQ , tangunt in punctis V & K) esse inter se parallelas, quod est absurdum contra propositionem præcedentem.

Huius etiam propositionis varii sunt casus, sed hoc intellectu, in reliquis nulla restat difficultas.

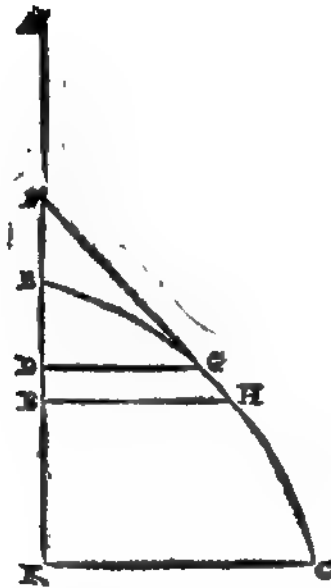
PROP. 7. PROBLEMA.

Rectam ducere datam curvam tangentem in eius puncto dato, si modo curva sit ex earum numero, quas Cartesius appellat Geometricas.

Sit curva BHC hyperbola, cuius diameter recta AK & ordinatim applicata EH, KC , talis naturæ, ut solidum ex quadrato ABE in AE sit ad solidum ex quadrato ABK in AK ut cubus ab EH ad cubum a KC . Sit AB data a , BE b , & ratio solidi ex quadrato ABE in AE ad cubum ab EH ut a ad a^2 ; oportet invenire punctum F , ut ducta recta FH hyperbolam tangat in puncto H . ex datis AB, BE , datur AE $a + b$ & EH \sqrt{C} ($ab^2c + b^3a^2$). Sit EF x & DE nihil seu seruum 0 ; &

proinde erit BD $b - 0$ & AD $a + b - 0$, FD $x - 0$ item DG \sqrt{C} ($c^3ab^3 - 2c^2ab^2 + c^3a^2b + c^3b^3 - 3c^2b^2a + 3c^3ba^2 - c^3a^3$).

quoniam supponimus ordinatim applicatam DG incidere in curvam in eodem puncto G ubi recta FH eidem (si modo possibile sit) curvæ occurrat, erit ut EH ad EF ita DG ad DF ; & ideo rectangulum ex DF in EH nempe $\sqrt{C}(b^2c^3ax -$



$$\underline{3b^2c^2ax^2o + 3b^2c^2axo^2 - b^2c^2ao^3 + b^2c^2x^3 - 3b^2c^2x^2b}$$

$$\underline{+ 3b^2c^2x^2o - b^2c^2o^3}) \text{ xquale erit rectangulo EF in DG}$$

$$\text{nempe } \sqrt{C(c^2ab^2x^3 - 2c^2abx^2o + c^2ax^2o^2 + c^2b^2x^3 -$$

$$3c^2b^2x^2o + 3c^2b^2x^2o^2 - c^2x^3o^3); \text{ \& denominatores}$$

propter xqualitatem auferendo, item & utrumque equationis terminum cubice multiplicando & xqualia utrinque auferendo resultat xquatio hęc $3b^2c^2ax^2o - 3b^2c^2ax^2o - b^2c^2ao^3 - 3b^2c^2x^3o + 3b^2c^2x^2o^2 - b^2c^2o^3 = c^2ax^2o^2 - 2c^2abx^2o - 3c^2b^2x^2o + 3c^2b^2x^2o^2 - c^2x^3o^3$, & omnia per o dividendo $3b^2c^2ax^2o - 3b^2c^2ax^2o - b^2c^2ao^2 - 3b^2c^2x^3 + 3b^2c^2x^2o - b^2c^2o^2 = c^2ax^2o - 2c^2abx^2o -$

$3c^2bx + 3c^2bz^2 - c^2x^2$, & quantitates reiiciendo in quibus
 reperitur o vel eius potestas, restant $-3b^2c^2x^2 - 3b^2c^2z^2 =$
 $-2c^2abx^2 - 3c^2b^2x^2$, & ubique defectus addendo & omnia
 dividendo per c^2bx , æquatio est $3ba + 3b^2 = 2ax + 3bx$, &
 ideo $x = \frac{3ba + 3b^2}{ax + 3b}$ nempe recta EF, quæ inuenienda erat.

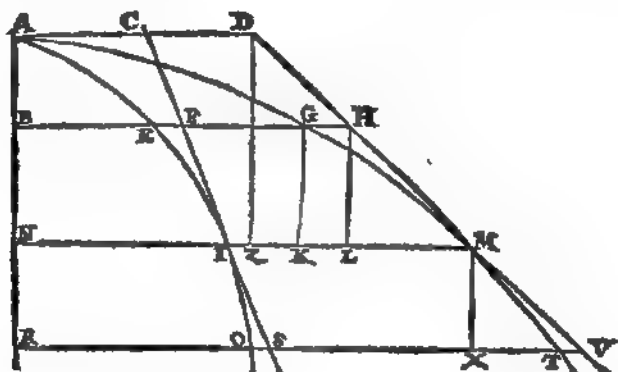
PROP. 8. PROBLEMA.

Sit curva ADIM cuius axis AL, sitque alia curva AFKO.
 eius naturæ, ut, ducta recta quacunque HIK, re-
 ctæ AL perpendiculari, curva AI sit ad rectam IK ut Pad Q.
 oportet ducere rectam tangentem curvam AFKO in pun-
 cto K: ducatur recta BI tangens curvam ADIM in puncto I
 (hoc enim fieri posse supponimus) sitque recta IB æqualis
 curvæ AI & ducatur recta BK, quam dico tangere curvam
 AFKO in puncto K: si eam non tangat, cadat intra, sitque
 punctum G intra curvam versus verticem, & ducatur rectæ
 KH parallela GFEDC. manifestum est IK esse ad EG ut
 IB ad EB, & per conuersionem rationis IK est ad differen-
 tiam inter IK & EG ut IB ad IE & permutando ut IK ad IB
 seu IA curvam, hoc est ut Qad P, ita differentia inter IK & EG
 ad EI, atque ut Qad P ita DF ad DA curvâ; & ideo ut IK ad
 IA curuam ita DF ad DA curvam, & permutando ut IK ad
 DF ita IA curua ad DA curvam, & per conuersionem ra-
 tionis, ut IK ad differentiam inter IK & DF ita curva
 IA seu recta IB ad curvam ID; at differentia inter IK & EG
 maior est differentia inter IK & DF, quoniam punctum G
 supponitur cadere intra curvam; & proinde IK minorem
 habet rationem ad excessum supra EG quam ad excessum
 supra DF; & ideo IB est ad IE in minore ratione quam ad DI,
 est igitur IE maior quam DI, quod est absurdum, non ergo
 cadit recta BK intra curvam AFKO versus verticem: cadat
 intra (si fieri potest) versus basem nempe producta in pun-
 cto

væ comparari cum suis axibus vel basibus secundum methodum huius.

PROP. 9. PROBLEMA.

Sit curva AEIO, cuius axis AR; sitque alia curva AGMT talis naturæ, ut ducta recta quæcunque NIM rectæ AR perpendiculari, curva AI sit ad rectam NM ut P ad Q. oportet ducere rectam tangentem curvam AGMT in puncto M. ducatur recta IC tangens curvam AEIO in I (hoc enim fieri posse supponimus) & occurrens rectæ AD ipsi NM parallele in D. sit MZ ad rectam IC ut Q ad P, sitque ZD parallela rectæ AR & ducatur recta DM, quam dico esse tan-



gentem curvæ AGMT in puncto M: si eam non tangat, cadat intra, sitque punctum H intra curvam versus verticem & ducatur ipsi NM parallela reliquis lineas secans vt in figura. AE est ad BG ut P ad Q & AI est ad NM ut P ad Q, & ideo ut AE ad BG ita AI ad NM & permutando ut AE ad AI ita BG ad NM, & ut AE ad EI ita BG ad KM, & permutando

mutando ut AE ad BG , hoc est ut P ad Q ita EI ad KM : deinde ut CI ad ZM , hoc est ut P ad Q ita FI ad LM , quod sic probo, ratio CI ad ZM componitur ex ratione CI ad DZ & DZ ad ZM , & ratio FI ad LM componitur ex ratione FI ad HL seu CI ad DZ & HL ad LM seu DZ ad ZM , & proinde ut EI ad KM ita FI ad LM , & permutando ut EI ad FI ita KM ad LM ; sed quoniam supponimus H cadere intra curvam, KM erit minor quam LM , & proinde EI minor erit quam FI , ^{1 bu} quod est absurdum, & ideo recta DM non cadet intra curvam versus verticem: cadat (si fieri possit) intra versus basem, nempe producta in puncto V . AI est ad NM ut P ad Q & AO est ad RT , ut P ad Q , & ideo AI est ad NM ut AO ad RT , & permutando AI est ad AO ut NM ad RT , & ut AI ad IO ita NM ad XT , & permutando ut AI ad NM seu ut P ad Q ita IO ad XT : deinde ut CI ad ZM seu P ad Q ita IS ad XV (quod probatur sicut in priore positione) & proinde ut IO ad XT ita IS ad XV , & permutando ut IO ad IS ita XT ad XV ; sed (quoniam supponimus V cadere intra curvam) erit XT maior quam XV ; & proinde IO maior erit quam IS , quod est absurdum, non ergo cadit recta DM intra curvam versus basem, & proinde curvam tangit in puncto M , quod demonstrare oportuit. ^{1 bu} ^{ius.}

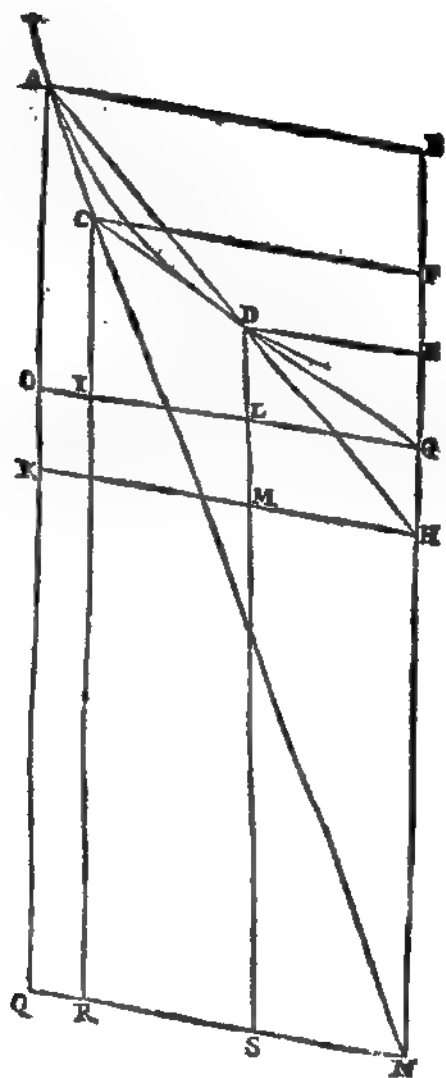
Per hanc propositionem potest curva, cuiuscunque superficiei trunci cylindrici recti expansa in planum, comparari cum eiusdem axe vel base ope huius 2, si modo possit duci recta tangens basem cylindrici in puncto dato.

PROP. 10. THEOREMA.

Sit curva quęcunque AD & recta quęcunque BN : ducantur ex duobus curvę punctis quibuscunque A, D , duę rectę parallelę ad rectam BN , nempe AB, DE , & iungatur AD recta producta in H , ducanturque DG, AN , rectę curvam tangentes in punctis A, D : deinde compleantur paralle-

D

10.

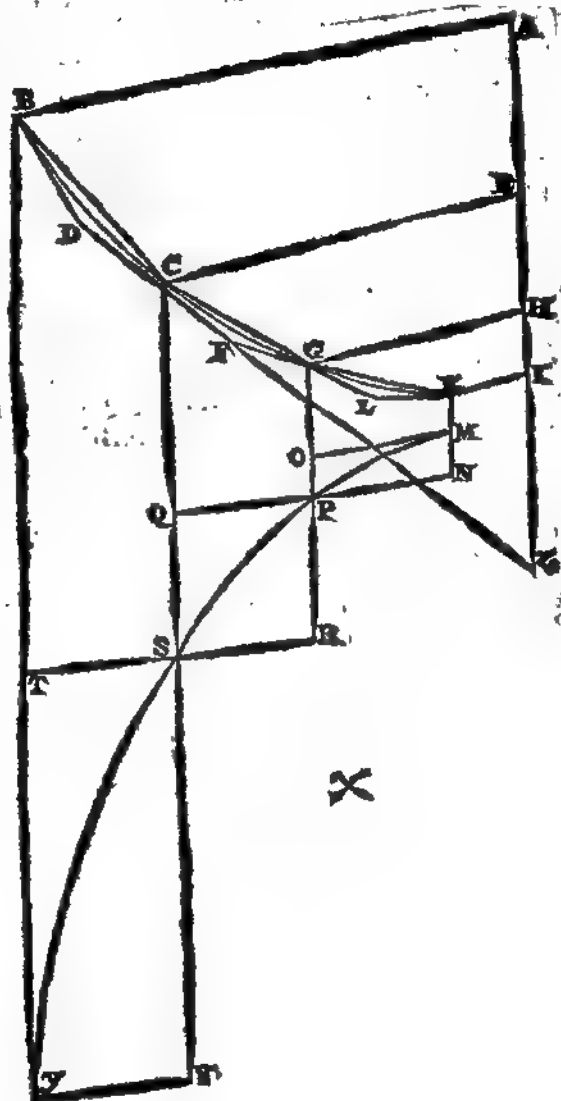


logramma ABGO, DENS, & producantur rectæ AO, NS, ut concurrant in Q. dico trapezium ADEB maius esse mixtilineo ADLO. ducatur HK parallela & æqualis rectæ AB; manifestum est trapezium ADEB esse æquale trapezio ADMK, item & trapezium ADMK maius esse trapezio ADLO, & ideo multo maius mixtilineo ADLO; patet ergo propositum nempe trapezium ADEB maius esse mixtilineo ADLO.

Producatur rectæ DG in C: dico rectilineum ABEDC minus esse mixtilineo ADSQ. ducatur recta CF parallela rectis AB, DE, & CR parallela rectis AQ, DS: patet trapezium ABFC esse æquale trapezio ACRQ & trapezium CFED esse æquale trapezio CDLI; & proinde rectilineum ABEDC æquale est rectilineo ACDLIRQ, quod minus est rectilineo ACDSQ; & ideo rectilineum ABEDC multo minus est mixtilineo ADSQ, quæ demonstranda erant.

PROP. II. THEOREMA.

Sit spatium mixtilineum quodcunque ABKI comprehensum à curva BK, recta AI, & duabus rectis parallelis BA, KI; sitque curva MY talis naturæ, ut (sumpto in curva BK quolibet puncto C & ex eo ducta recta CE parallela rectæ AB, & recta CZ curvam BK contingente terminata a recta AI, si opus est, producta in Z) recta EZ semper sit æqualis rectæ CS parallela rectæ AZ & terminata à curva MY. dico mixtilineum BKMY, comprehensum à curvis BK, MY, & rectis BY, KM, rectæ AZ parallelis, esse æquale mixtilineo BAIK. Si non sunt æqualia, sit eorum differentia X; & dividatur curvilineum BKMY à tot rectis CS, GP, KM, rectæ BY parallelis, ut (ductis rectis OM, QN, TR, YV, parallelis rectæ AB) omnia parallelogramma ON, QR, TV, simul minora sint quam X, hoc enim fieri potest ab indefinito parallelarum numero. ducantur subtendentes rectæ BC, CG, GK, & tangentes in punctis B, C, G, K, BD, DE, FL, LK; manifestum



manifestum est ex præcedente trapezium $ABCE$ maius esse mixtilineo $BCST$ item & trapezium $CEHG$ maius esse mixtilineo $C.G.P.Q$ & trapezium $G.H.I.K$ maius esse mixtilineo $G.K.M.O$, & ideo rectilineum $ABCGKI$ maius est mixtilineo $BKMOPQST$. patet quoque ex antecedente rectilineum $ABDCE$ minus esse mixtilineo $BCVY$ & rectilineum $ECFGH$ minus esse mixtilineo $C.G.R.S$ & rectilineum $H.G.K.I$ minus mixtilineo $G.K.N.P$, & proinde rectilineum $ABDFLKI$ minus est mixtilineo $BKNPRSVY$: cum igitur mixtilineum $BAIK$ consistat inter rectilinea $ABCGKI$, $ABDFLKI$ & mixtilineum $BKMY$ consistat inter mixtilinea $KMOPQSTB$, $KNPRSVYB$, item rectilinea $ABCGKI$, $ABDFLKI$ consistent inter mixtilinea $BKMOPQST$, $BKNPRSVY$, manifestum est mixtilinea $ABKI$, $KMYB$, minore quantitate differre quam mixtilinea $BKMOPQST$, $KNPRSVYB$, sed horum differentia ex suppositione est minor quam X , & ideo differentia mixtilineorum $ABKI$, $BKMY$, est multo minor quam X , quod est absurdum, ponitur enim maior quam X ; nulla ergo est differentia inter mixtilinea $ABKI$, $BKMY$, & ideo æqualia sunt, quod erat demonstrandum. Eadem fere esset demonstratio in duabus præcedentibus, etiam si convexitas curvæ BK esset versus rectam AI .

DEFINITIONES.

I.

SI fuerit figura $ABFE$ comprehensa à rectis parallelis AB , EF , recta AE parallelis normali & a BF linea quolibet, item figura GHK comprehensa a rectis GH , GK , (ita ut GH sit æqualis rectæ AB & GK rectæ EF) & linea HK , quæ etiam æqualis est lineæ BF , hac lege, ut, sumptis ad libitum lineis æqualibus BD , HI , iuncta recta GI fiat æqualis rectæ DC perpendiculari ad rectam AE : appello figuram GHK , figuram $ABFE$ involutam; & figuram $ABFE$, figuram GHK evolutam.

Appel-

Appello quoque puncta B, H , vel D, I , vel F, K , sibi mutuo relativa.

3.

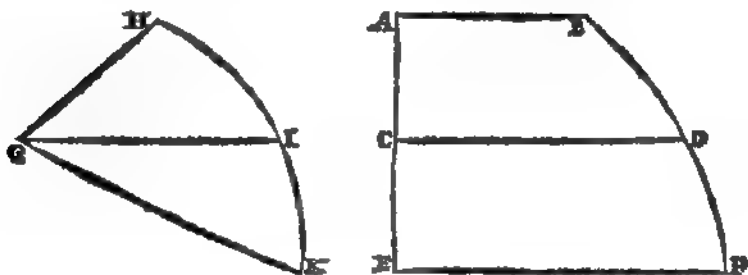
Punctum G appello centrum involutionis.

4.

Angulum $H G K$ voco angulum involutionis.

5.

Appello rectam $A E$ evolutæ figuræ axem, item quamlibet CD illi perpendicularem axi ordinatim applicatam.

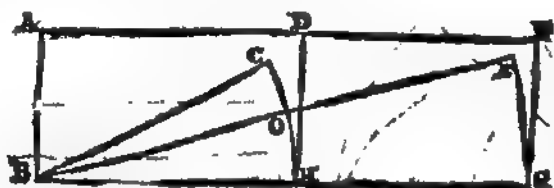


PROP. 12. THEOREMA.

Sit rectangulum $AFGB$, quod involutum efficiat sectorem circuli BEG , item rectangulum $ADHB$, quod involutum efficiat sectorem BCH . dico angulum involutionis GBH maiorem esse angulo involutionis EBG . est enim ut

BG

BG ad BH ita arcus EG seu arcus CH ad arcum OH, sed BG maior est quam BH, & ideo CH maior est quam OH, & ideo angulus CBH maior est angulo EBG, quod erat demonstrandum.



PROP. 13. THEOREMA.

Sit figura ABMI, quæ involuta efficiat figuram NPX. sit ex centro involutionis N arcus circuli PT: dico arcum PT minorem esse recta AI, seu figuræ evolutæ axe. ducatur recta BK parallela & æqualis rectæ AI, sitque rectangulum ad libitum EGLI, ut figuræ ABMI inscribatur rectilineum ABFGLI, quod si involvatur, erit eius angulus involutionis minor angulo involutionis rectanguli ABKI involuti, hoc autem ita innotescit, rectilineum ABFGLI involutum idem est cum involuto rectangulo ABFE vna cum involuto rectangulo EGLI, & rectangulum ABKI involutum idem est cum priore involuto rectangulo ABFE vna cum involuto rectangulo EFKI, sed ex præcedente angulus involutionis rectanguli EGLI minor est angulo involutionis rectanguli EFKI, & proinde angulus involutionis rectilinei ABFGLI involuti minor est angulo involutionis rectanguli ABKI involuti: eodem prorsus modo (si ducantur rectæ QR, SV, parallelæ rectis AB, IM, & rectæ RØ, VY, parallelæ axi AI, ut compleatur rectilineum ABQRØGSVYI) demonstrabitur eius angulus involutionis esse minor angulo involutio-

nis

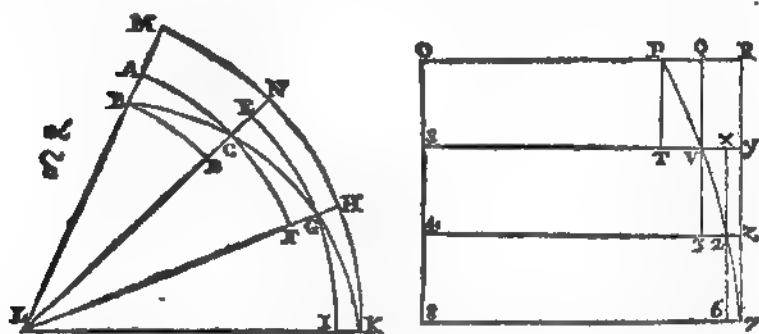
gulo $A D H E$, sed ex præcedente angulus involutionis rectanguli $A C G E$ maior est angulo involutionis $A D H E$, & proinde angulus involutionis rectilinei $A C G H M I$ inuoluti maior est angulo involutionis rectanguli $A D M I$: eodem prorsus modo (si ducantur rectæ $R \beta, V Z$, parallele rectis $A \beta, I M$, & rectæ $R \alpha, V X$, parallellæ axi $A I$, ut compleatur rectilineum $A \alpha R \beta G X V Z M I$) demonstrabitur eius angulus involutionis esse maior angulo involutionis rectilinei $A C G H M I$, & proinde multo maior erit angulo involutionis rectanguli $A D M I$ nempe $\delta N X$, supponimus enim sectorem $\delta N X$ esse rectangulum $A D M I$ inuolutum: denique eodem semper modo demonstratur, quod, quo minus differt rectilineum circumscriptum à figura $A B M I$, eo semper maior sit excessus anguli involutionis rectilinei supra angulum $\delta N X$, & ideo multo excedit angulus involutionis ipsius figura $P N X$ angulum $\delta N X$, & proinde figuræ evolutæ axis $A I$ seu arcus δX multo minor est arcu $O X$, quod demonstrare oportuit.

PROP. 14. PROBLEMA.

Ex data figura involuta, eiusdem evolutæ axem invenire.

Sit figura involuta $L B K$, cuius evolutæ oportet invenire axem. Centro L sit circuli arcus $M K$; sitque figura $O P 78$ contenta rectis parallelis $O P, 87$, rectaque $O 8$ illas normaliter secante & linea $P 7$ talis naturæ, ut (in involuta sumpta qualibet recta $L C$ producta in N , item in figura $O P 78$ ducta recta $S V$ rectæ $O 8$ perpendiculari & eam secante in ratione $M N$ ad $N K$) 87 sit ad $S V$ ut $L K$ ad $L C$. dico rectangulum circumscriptum $O R 78$ esse ad figuram $O P 78$ ut arcus $M K$ ad axem figuræ $L B K$ evolutæ: si non sit ita, sit ut $O R 78$ ad $O P 78$ ita $M K$ ad α , quæ differat ab axe figuræ $L B K$ evolutæ quâritate δ : deinde e centro L circumscribantur figuræ involutæ $L B K$ similes arcus circulares $A C, E G, H k$, & eidem inscri-

scribantur totidem similes arcus circulares BD , CF , GI , vt differentia inter arcus inscriptos & circumscriptos sit minor quam δ ; deinde dividatur recta OS in tot partes æquales O S , S_4 , 48 , in quot dividitur arcus MK a rectis LC , LG , productis, ducanturque ipsi OS perpendiculares rectæ SY , $4Z$, lineam $P7$ secantes in punctis V , 2 , & iungantur rectæ OS parallelæ PT , QV , $X26$. manifestum est ex figuræ $OP78$ descriptione SY esse ad SV vt LN ad LC seu vt arcus MN ad arcum AC ; & ideo vt rectangulum OY ad rectangulum OV ita arcus MN ad arcum AC ; eodem modo probatur, vt re-



ctangulum SZ ad rectangulum $S2$ ita arcus NH seu arcus MN ad arcum EG , & vt rectangulum 47 ad rectangulum 47 ita arcus HK ad arcum HK , cumque omnes primæ inter se & omnes terriæ inter se sint æquales, erit vt omnes primæ nempe rectangulum $O7$ ad omnes secundas nempe rectilineum $OQVX2Z78$ ita omnes terriæ nempe arcus MK ad omnes quartas nempe arcus AC , EG , HK ; est autem vt $O7$ ad figuram $OP78$ ita MK ad α , at rectilineum $OQVX2Z78$ maius est quam figura $OP78$, & ideo arcus AC , EG , HK , simul sunt maiores quam α ; sed arcus AC , EG , HK , maiores etiam

etiā sunt quādam axis figuræ LKB euolutæ, quod sic probo,
axis totius figuræ LKB euolutæ est æqualis axibus figurarum
BLC, CLG, GLK, euolutarum, sed ex antecedente axis fi-
guræ LBC euolutæ minor est arcu AC, & axis figuræ CLG
euolutæ minor arcu EG, item axis figuræ GLK euolutæ mi-
nor arcu HK, & igitur axes omnium figurarum partialium si-
mul seu axis figuræ LKB euolutæ minor erit omnibus arcu-
bus AC, EG, HK, simul. Deinde ex descriptione figuræ OP
78, ut OR ad OP seu ut OY ad OT ita L M ad L B vel M N ad
BD, eodemque modo demonstratur, ut SZ ad S₃ ita NH ad
CF, & 47 ad 46 ita HK ad GI, cumque primæ inter se &
tertiæ inter se semper sint æquales, erit ut omnes primæ nē-
pe O7 ad omnes secundas nempe rectilineum OPTV₃₂₆₈
ita omnes tertiæ nempe MK ad omnes quartas nempe arcus
BD, CF, GI, cumque sit ut O7 ad figuram OP78 ita MK ad α
& rectilineum OPTV₃₂₆₈ sit minus quam figura OP78, erūt
omnes arcus BD, CF, GI, simul minores quam α , sed arcus
BD, CF, GI, minores etiam sunt quam axis figuræ LKB euo-
lutæ, quod sic probo, axis totius figuræ L B K euolutæ est
æqualis axibus figurarum BLC, CLG, GLK, euolutarum,
sed ex antecedente, axis figuræ LBC euolutæ maior est arcu
BD, & axis figuræ CLG euolutæ maior arcu CF & axis fi-
guræ GLK maior arcu GI, & igitur axis omnium figurarum
partialiū simul seu axis figuræ LKB euolutæ maior est omni-
bus arcubus BD, CF, GI, simul; evidens igitur est quatuor
esse magnitudines, nempe prima omnes arcus BD, CF, GI,
simul, secunda axis figuræ L B K euolutæ, tertia α , quarta
omnes arcus AC, EG, HK, simul, quarum maxima & mini-
ma sunt, omnes arcus AC, EG, HK, simul, & omnes arcus
BD, CF, GI, simul, harum ergo differentia maior erit quam
differentia duarum reliquarum nempe axis figuræ LKB euo-
lutæ & quantitatis α , quod est absurdum, ponitur enim mi-
nor, nulla ergo est differentia inter α & axem figuræ L B K
euolutæ, & ideo æquales sunt, quod demonstrare oportuit.

Hinc manifestum est ex data figura inuoluta inueniri posse eandem euolutam, nam ex hac datur figurę inuolutę LBK vel eius cuiuslibet partis BLC (dum euoluitur) axis, danturque ordinatim applicatę, quoniam sunt eadem cum rectis inter centrum inuolutionis L & puncta sua relatiua in figura euoluta LBK .

PROP. 15 PROBLEMA.

In antecedente figura oportet inuenire rationem inter sectorem MLK & figuram $B L K$.

Sit figura $OP78$ contenta rectis parallelis OP , 87 , rectęque $O8$ illas normaliter secante & linea $P7$ talis nature, vt (in inuoluta sumpta qualibet recta LC producta in N , ite in figura $OP78$ ducta recta SV rectę $O8$ perpendiculari & eam secante in ratione MN ad NK) 87 sit ad SV in duplicata ratione rectę LK ad LC : dico rectangulum circumscriptum $OR78$ esse ad figuram $OP78$, vt sector LMK ad inuolutam LBK . Si non sit ita, sit vt $OR78$ ad $OP78$ ita MLK ad a , quę differat ab inuoluta BLK quantitate δ : deinde circumscribantur figurę inuolutę BLK similes sectores circulares LAC , LEG , LHK , & eidem inscribantur totidem similes sectores circulares LBD , LCF , LGI , vt differentia inter mixtilineum inscriptum $LBDCFGI$ & circumscriptum $LACEGHK$ sit minor quam δ : deinde diuidatur $O8$ in tot partes æquales OS , $S4$, 48 , in quot diuiditur arcus MK a rectis LC , LG , productis, ducanturque ipsi $O8$ perpendiculares rectę SY , $4Z$, lineam $P7$ secantes in punctis, V , 2 , & iungantur rectę OS parallele PT , $QV3$, $X26$: manifestum est ex figurę $OP78$ descriptione SY esse ad SV seu OY ad OV in duplicata ratione LN ad LC seu vt sector LMN ad sectorem LAC ; eodem

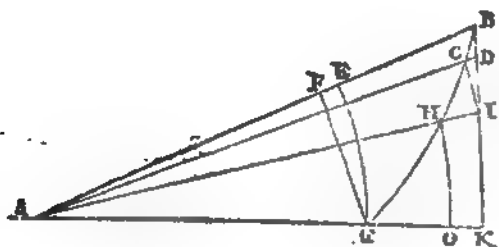
modo probatur SZ esse ad Sz vt LNH ad LEG , & 47 ad 47 vt LHK ad LHK , cumque omnes primæ inter se & omnes tertiæ inter se sint æquales, erit vt omnes primæ nempe rectangulum $O7$ ad omnes secundas nempe rectilineum $OQVX$, $Z78$ ita omnes tertiæ nempe sector MLK ad omnes quartas nempe mixtilineum $LACEGHK$, est autem vt $O7$ ad figuram $OP78$ ita sector MLK ad α , at rectilineum $OQVX$, $Z78$ maius est quam figura $OP78$, & ideo mixtilineum $LACEGHK$ maius est quam α . Deinde ex descriptione figuræ $OP78$, OR est ad OP vel OY ad OT in duplicata ratione LM ad LB vel vt MLN ad BLD , eodemque modo probatur, SZ ad Sz vt NLH ad CLF , & 47 ad 46 vt HLK ad GLI , cumque primæ inter se & tertiæ inter se semper sint æquales, erit vt omnes primæ nempe $O7$ ad omnes secundas nempe rectilineum $OPTV$, 3268 ita omnes tertiæ nempe MLK ad omnes quartas nempe mixtilineum $LBDCFGI$, at rectilineum $OPTV$, 3268 minus est quam figura $OP78$, & ideo mixtilineum $LBDCFGI$ minus est quam α ; euident igitur est quatuor esse magnitudines, nempe prima mixtilineum $LBDCFGI$, secunda, inuoluta LBK , tertia α , quarta mixtilineum $LACEGHK$, quarum maxima & minima sunt mixtilinea $LACEGHK$, $LBDCFGI$, harum ergo differentia maior erit quam differentia duarum reliquarum nempe α & inuolutæ LBK , quod est absurdum, ponitur enim minor, nulla ergo est differentia inter α & inuolutam LBK , sunt ergo æquales, quod demonstrare oportuit.

PROP. 16. THEOREMA.

Omnis figura evoluta est eiusdem inuoluta dupla.

Sit figura inuoluta LBK , quæ evoluta efficiat figuram $OP78$: dico figuram $OP78$ duplam esse figuræ LBK : si ita non sit, fiat evoluta $OP78$ dupla quantitatis α , quæ differat ab inuoluta LBK quantitate δ ; inscribatur inuolutæ LBK

figuræ ABG euolutæ supra rectam BK ; ducantur ex centro A arcus circulares CI , HO ; manifestum est arcum CI maiorem esse axe figuræ CAH euolutæ & HO maiorem esse axe figuræ HAG euolutæ, atque recta DI maior est arcu CI & recta IK maior est arcu HO , & ideo recta DK multo maior est quam axis figuræ CAH euolutæ una cum axe figuræ HAG euolutæ, hoc est, recta DK maior est axe figuræ CAG euolutæ, sed axis figuræ BAG euolutæ superat rectam BK maiore excessu quam axe figuræ BAC euolutæ, & proinde axis fi-



guræ BAG euolutæ minùs axis figuræ BAC euolutæ, hoc est, axis figuræ CAG euolutæ, maior est recta BK , sed & minor est rectæ DK , quod est absurdum, recta ergo BK non est minor axe figuræ BAG euolutæ, quod demonstrandum erat.

Ex puncto G in rectâ AB sit perpendicularis recta GF , quam dico esse minorem axe figuræ ABG euolutæ. centro A sit arcus circularis GE , qui maior est recta GF & minor axe figuræ ABG euolutæ, & ideo recta GF multo minor est axe figuræ ABG euolutæ, quod demonstrare oportuit;

PROP.

Secundo, si fieri potest, cadat linea OB extra lineam OA in puncto D ; suppono curuam OA (quo propius ad A) eo minus distare ab axe CI ; cadat DF perpendicularis in rectam OI non productam intra curuam DO , & ideo DF est minor axe figure IDO evolute; sit in euoluta ordinatim applicata EH , equalis recte DI ; manifestum est figuram $OEHI$ esse IOD euolutam, atque ID seu HE maior est quam recta KG , & ideo GI est maior quam HI , nempe DF maior quam axis figure IDO evolute, quod est absurdum ex huius antecedente, & proinde BO non cadit extra AO : eodem modo probatur OB non coincidere cum OA , cadit ergo intra, quod demonstrare oportuit.

Quod si perpendicularis DF cadat in IO productam, non potest IOB esse figura $IOAC$ involuta, quoniam ID maior erit quam vlla ordinatim applicata in figura $IOAC$.

CONSECTARIVM.

Quoniam figure $CAOQR$, $IBOP$, se mutuo tangunt in puncto O , manifestum est rectam, vnam ex his figuris tangentem in puncto O , alteram etiam in eodem puncto tangere; atque hinc evidens est methodus ducendi rectam, quę involutam in dato puncto tangat, si modo detur methodus ducendi rectam, quę euolutam in dato puncto contingat, & e contra; recta enim tangens euolutam eodem inclinatur angulo ad ordinatim applicatam, quo tangens involutam inclinatur ad eandem ordinatim applicatam in centrum inuolutionis cum reliquis concurrentem.

Omnia prædicta de figurarum inuolutione eodem modo demonstrantur, quando evolute curua est convexa versus axem, etiam si in nostris figuris evolute curua sit versus axem concava.

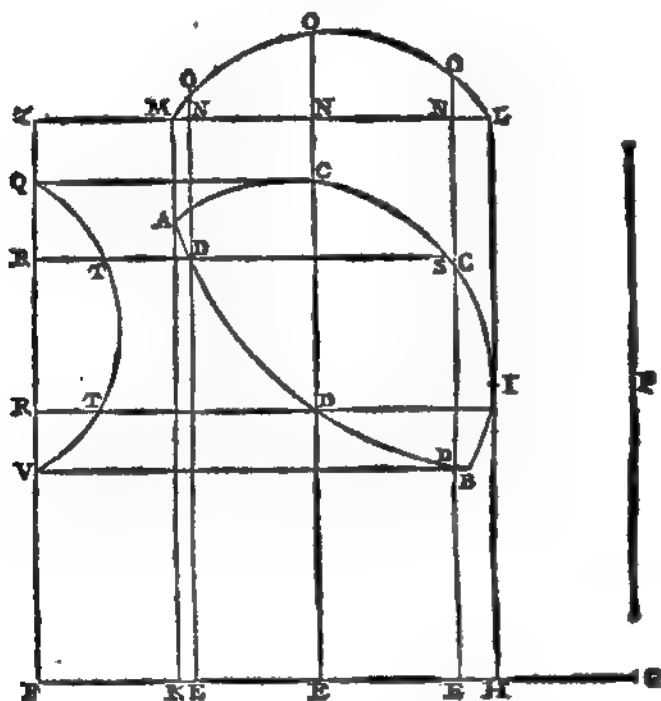
Sit figura quęcunque AB super qua imaginetur cylindricus reſus ſectus a plano tranſeunte per rectam FG & planum baſeos AB ſeminormaliter ſecante. ſit recta ML rectę FG parallelas, ſitque ſuper recta ML mixtilineum MO LN talis naturę, vt (ducta recta quacunque EDCNO rectę FG normali & figuras AB, LOMN, ſecante in punctis D, C, N, O) recta assignata P ſit ad mediam arithmeticam inter DE, CE, vt DC ad NO. Dico cylindricum reſum cuius baſis MOLN & altitudo recta P eſſe æqualem inferiori trunco cylindrici ſuper AB ſecti vt ſupra dictum eſt. Quoniam enim P eſt ad mediam arithmeticam inter DE, CE, vt DC ad NO, igitur reſt angulum P in NO æquale eſt trapezio a rectis DC, CE, DE, reſt angulo ad D & C, ſed tale trapezium eſt communis ſectio plani ſuper recta EO ad baſem AB reſti cum trunco inferiore cylindrici; cumque hoc ſemper fiat vbicunque ducatur recta EDCNO, manifeſtum eſt ex doctrina ductuum Gregorii à S. Vincentio cylindricum reſum cuius baſis MOLN & altitudo P æqualem eſſe trunco inferiori cylindrici reſti ſuper MOLN ſecti vt ſupra dictum eſt, quod demonſtrare oportuit.

Hinc quoque patet cylindricum cuius baſis MOLN & altitudo P eſſe magnitudine & grauitate analogum dicto trunco; cumque cylindricus ſit ſuę baſi analogus, patet etiam truncum eſſe eidem baſi magnitudine & grauitate analogũ.

PROP. 20. THEOREMA.

EIdem poſitis quę in antecedente, ſit recta FZ rectę FG normali, ſuper qua ſit mixtilineum QTVR talis naturę, vt (ducta recta quacunque RTDS rectę FR normali & figuras QTVR, AB, interſecante in punctis T, D, S) recta assignata P ſit ad DS, vt recta RF ad rectam RT. dico cylindricum

cum rectum cuius basis QTVR & altitudo P esse æqualem inferiori trunco cylindrici super AB seci vt supra dictum est, nempe per planum in recta FG transiens & basem AB seminormaliter secans. Quoniam P est ad DS vt RF ad RT, erit rectangulum P in R T æquale rectangulo R F in D S, sed rectangulum R F in D S est communis intersectio trunci infe-



rioris cylindrici cum plano super recta RS plano baseos AB normalis, & ideo rectangulum P in R T eidem communi sectioni est æquale, cumque hoc semper fiat vbicunque ducatur recta RS, manifestum est ex doctrina ductum Gregorii

a S. Vincentio cylindricum rectum cuius basis QTVR & altitudo P æqualem esse trunco inferiori cylindrici recti super AB secti ut dictum est supra, quod demonstrare oportuit.

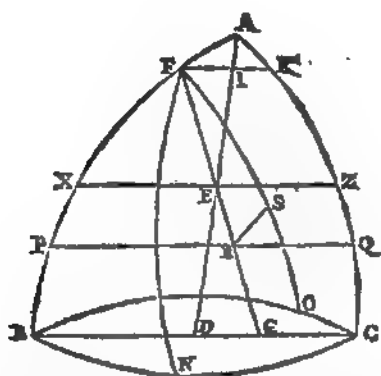
Hinc etiam evidens est cylindricum cuius basis QT VR & altitudo P esse magnitudine & gravitate analogum dicto trunco cylindrici recti, & proinde basis quoque cylindrici recti QTVR eidem trunco est analogia magnitudine & gravitate.

Supposito omnium figurarum quadraturas & centra gravitatis data esse, facile erit omnium truncorum cylindrici cuiuslibet recti cubaturas & centra gravitatis ex hac propositione & præcedente invenire, vel e contra: eodem modo ex huius secunda tertia & quarta datis omnium figurarum quadraturis & gravitatis centris non difficile est invenire superficiem cuiusunque trunci cylindrici recti quadraturam & gravitatis centrum vel e contra, quod hic admonuisse sufficiat.

PROP. 21. PROBLEMA.

Sit solidum rotundum quodlibet sectum per diametrum AD plano normali ad basem circularem BO CN a diametro BC, & intersectione cum plano efficiens figuram ABC: secetur solidum rotundum ABC ab alio plano quomodocunque FNGO ad planum AB normali, ita ut communis solidi & plani intersectio sit figura FNGO, cuius intersectio cum plano ABC est recta FG: ducatur FK recta BC parallela & rectæ AD occurrens in I. concipiatur solidum rotundum, diametrum habens FG, ex circulis constatum, quorum radii sunt omnes perpendiculares ex recta FG in curvam FO, ita ut diameter figuræ FG per centra infinitorum illorum circularum transiens, ad illos omnes inclinet in angulo æquali ipsi FGB. ex datis, solido ABC & punctis F, G, oportet etiam exhibere mensuram solidi illius rotundi, quod

quod sit $FOGN$. Ad rectam FG secet in E , & rectæ BC parallela ducatur per E recta XEZ . ex datis punctis F, G , datur punctum E , quoniam supponitur dari ABC figura: infra XZ ducatur quodlibet planum basi $BOCN$ parallelum & cum planis $ABC, FOGN$, communes intersectiones faciens rectas PQ, RS : manifestum RS esse radium circuli in solido $FOGN$ per R transeuntis; & ob rotunditatem solidi ABC , & sectionem normalem plani ABC ad basem, punctum S est in semicirculo, cuius diameter PQ ; & igitur quadratum rectæ



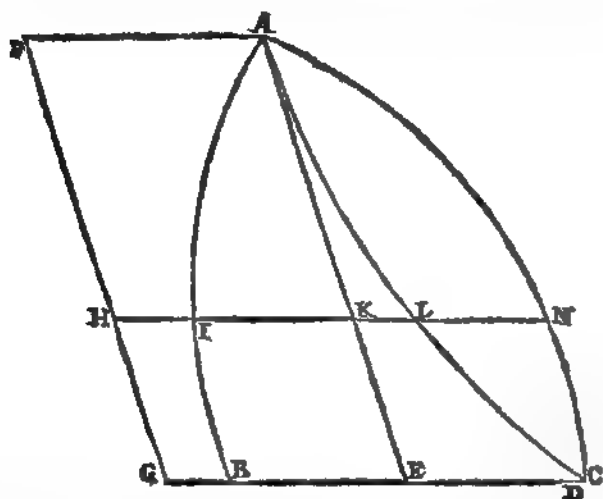
RS æquale est rectangulo PRQ , & circulus ex radio RS æqualis armillæ circulari PRQ ; cumque hoc semper fiat inter E & G ; erit portio solidi rotundi $FOGN$ infra E æqualis omnibus armillis circularibus inter circulum XEZ & armillam BGC , hoc est, solido excavato æquali portioni solidi rotundi $XZCB$ post ablatum conum cuius vertex E & semidiameter baseos DG ; eodem modo probatur portionem solidi rotundi $FOGN$ inter E & F æqualem esse solido excavato $FKZX$ post ablatum conum, cuius vertex E & baseos semidiameter IF ; & igitur si a portione solidi rotundi data $FKCB$,
au-

auferatur quadruplum conorum ad verticem datorum FEI , DEG ; relinquetur solidum quæsitum rotundum $FOGN$. Si vero daretur centrum gravitatis solidi rotundi ABC & centrum ablati AFK ; daretur etiam centrum gravitatis portionis $FKCB$, quo dato una cum centro gravitatis conorum abstrahendorum, datur etiam centrum gravitatis portionis excavatæ, quæ cum solido rotundo $FOGN$ est proportionaliter analogæ, ut liquet ex demonstratione; ergo datur etiam centrum gravitatis solidi rotundi FOG . Sunt etiam alii huius propositionis casus, sed hoc intellecto in reliquis nulla restat difficultas.

PROP. 22. PROBLEMA.

Sit solidum rotundum sectum per diametrum AE , plano normali ad basem circulem a diametro BC , & intersectione cum plano efficiens figuram BAC . Sit $FAEG$ parallelogramum, & describatur linea ALD eius naturæ, ut ducta recta HL utcumque basi BC parallella, rectæ HK , IK , KL , sint continue proportionales. ex data solidi rotundi ABC ad cylindrum datum ratione, oportet figuræ $ALDEK$ quadraturam invenire. ducatur recta utcumque $HIKLN$: quadratum a latere IK , hoc est rectangulum HKL est quarta pars quadrati ex IN ; & ideo rectangulum HKL est ad circulum ex diametro IN in ratione composita ex ratione subquadrupla & ex ratione quadrati diametri ad circulum; sed punctum K sumptum est arbitrariè; & proinde cylindricus rectus ex base $ALDEK$ in altitudinem HK est ad solidum rotundum ABC in ratione composita ex ratione subquadrupla & ex ratione quadrati diametri ad circulum; & ideo quadruplum cylindrici prædicti est ad solidum rotundum ABC , ut quadratum diametri ad circulum, hoc est, ut parallelepipedum rectangulum ad cylindrum eiusdem altitudinis sibi inscriptum, & permutando, quadruplum cylindrici est ad parallelepipedum

pedum ut solidum rotundum ad cylindrum; & proinde datur ratio quadrupli cylindrici ad parallellipipedum, & ideo datur cylindrici cubatura, & baseos ALDEK quadratura.



Ex demonstratione etiam manifestum est solidum rotundum ABC esse figuræ ALDEK analogum tam in magnitudine quam in gravitate, quoniam eadem quæ demonstrantur de totis, eodem modo demonstrari possunt de partibus eorum proportionalibus; & igitur centrum gravitatis solidi rotundi est centrum æquilibrii figuræ.

Hinc etiam manifestum est cylindricum cuius basis AKED L & altitudo HK duplum esse trunci cylindrici recti cuius basis AIBE secti a plano in angulo semirecto inclinante, & per rectam AB baseos planum secante; hoc autem trunco dato, datur quilibet alius truncus per eandem rectam AE abscissus, quoniam tales trunci inter se sunt ut altitudines, vel ut cli-

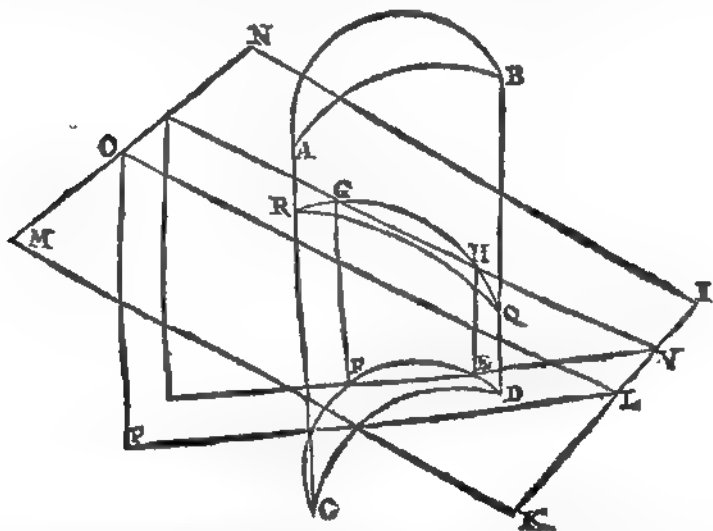
inclinatum tangentes, quod facile est demonstratu.

Nullo quoque negotio demonstratur huius problematis conuersum, nempe ex datis figuræ alicuius quadratura & grauitatis centro; solidi alicuius rotundi ad cylindrum datæ proportionem, & eius centrum grauitatis, inuenire.

P R O P. 23. T H E O R E M A.

Si cylindricus reclus existens super qualibet figura, secetur plano; quilibet truncus huius cylindrici erit ad solidum rotundum ortum ex eius base rotata circa communem sectionem baseos (si opus est) producta & plani secantis, vt altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli, cuius semidiameter est radius rotationis.

Sic cylindricus reclus $ABDC$ super figura quacunque DC , qui secetur plano quocunque $KINM$, ita vt commu-



nis intersectio plani cum cylindrico fiat figura $RGHQ$. producat planum secans donec baseos DC planum secet in recta

recta IK , & planum AB in recta MN : & a puncto quolibet
 recte IK nempe L , ducatur eidem IK perpendicularare planum
 OLP , secans planum $IKMN$, DFC , normaliter in rectis OL , L
 P ; sitque perpendicularis in L recta OP . Supponimus hic K
 esse axem rotationis; & rectam PL illi normalem, appella-
 mus radium rotationis. dico truncum cylindrici $RQDC$ esse
 ad solidum rotundum ortum ex rotatione figure $DEFC$ cir-
 ca IK axem rotationis, ut OP altitudo cylindrici ad circum-
 ferentiam circuli, cuius semidiameter est radius rotationis
 LP . per basem $DEFC$ ducatur vbilibet recta EF , a baseos
 circumferentia vtrinque terminata in E & F , quæ producta,
 axi rotationis normaliter incidat in puncto V : a punctis E, F ,
 excitentur perpendiculares baseos plano EH , FG , a plano
 secante terminatæ in H & G , quæ necessario sunt in superfi-
 cie trunci ob cylindricum rectum, ducaturque VH recta,
 quæ necessario existit in $IKMN$ plano secante: manifestum
 est triangula OLP , HEV , retriangula ad P & E (cum habeant
 angulos OLP , HEV , æquales inclinationi plani secantis IK
 MN) esse similia; & ducta recta GV , ob eandem rationem
 similia sunt triangula HEV , GFV , cumque GF sit parallela
 rectæ HE , & EF in directum EV , coincident rectæ GV , HV ,
 in vnam rectam plani $IKMN$, eritque $GHEF$ communis in-
 tersectio plani GFV , plano OLP parallelis cum trunco cy-
 lindrici $RQDC$: patet ergo OP ad PL esse, ut HE ad EV ; &
 ideo ut OP ad circumferentiam circuli cuius semidiameter R
 L , ita HE ad circumferentiam circuli cuius semidiameter E
 V ; & ut OP ad circumferentiam circuli cuius semidiameter
 PL , ita (reliquos terminos in eandem altitudinem, nempe
 semissem rectæ EV , ducendo) triangulum HEV ad circu-
 lum cuius semidiameter EV : eodem modo demonstratur
 esse, ut OP ad circumferentiam circuli, cuius semidiameter
 PL , ita triangulum GFV ad circum, cuius semidiameter F
 V : est igitur totum triangulum GFV ad totum circum
 cuius semidiameter FV , ita ablatum triangulum HEV ad
 G abla:

50
 ablatum circulum cuius semidiameter EV ; & proinde in eadē
 dem ratione erit relictum trapezium $GF EH$ ad relictam ar-
 millam circularem genitam ex reuolutione rectæ FE circa
 axem rotationis IK , nempe in tatione OP ad circumferentiam
 circuli, cuius semidiameter LP ; atque hæc proportio
 eodem modo demonstratur de omnibus rectis ductis in basē
 se $DEFC$, quæ (si opus est) productæ, in axem rotationis IK
 normaliter incidunt; atque ex omnibus istis rectis consti-
 tur ipsa basis DC ; ex omnibus trapeziis super istis rectis de-
 scriptis constatur truncus $RQDC$, & ex omnibus armillis ab
 istarum rectarum reuolutione genitis, constatur solidum ro-
 tundum genitum a reuolutione baseos circa axem rotatio-
 nis IK ; & proinde ut vna antecedentium ad vnā consequē-
 tium, nimirum OP altitudo cylindri ad circumferentiam cir-
 culi cuius semidiameter PL radius nempe rotationis, ita
 omnes antecedentes, nimirum omnia trapezia, hoc est, trū-
 cus $RQDC$, ad omnes consequentes, nempe omnes armil-
 las circulares, hoc est, solidum rotundum ortum ex rotatio-
 ne figuræ DC circa axem IK , quod demonstrare oportuit.

Hoc theorema eodem modo demonstratur de trunco su-
 periore, si figura AB concipiatur rotari circa rectam MN .

Pater ex demonstratione truncum $RQDC$ & solidum ro-
 tundum ortum ex reuolutione baseos DC circa axem rota-
 tionis IK , esse quantitates magnitudine & gravitate analo-
 gas, quoniam eadem proportio quæ demonstratur inter in-
 tegras, eodem modo demonstratur de earum partibus pro-
 portionalibus.

In sequentibus notandum (quando loquimur de superfi-
 cie cylindrici vel trunci) nos intelligere solam superficiem
 sine basibus; hoc est nunquam consideramus figuras quæ
 sunt cylindrici bases, nec communem sectionem plani cy-
 lindricum secantis.

PROP.

Eisdem positis, quæ in antecedente; superficies trunci erit ad superficiem solidi rotundi orti ex eius base rotata circa communem sectionem baseos (si opus est) producta & plani secantis, ut altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli cuius semidiameter est radius rotationis.

Figura & præparatio sint eadem sicut in antecedente; dico superficiem trunci $RQDC$ esse ad superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ $DEFC$ circa IK axem rotationis, ut OP altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli cuius semidiameter est radius rotationis LP . in antecedente demonstratum est OP esse ad circumferentiam circuli cuius semidiameter PL , ut HE ad circumferentiam circuli cuius semidiameter EV : atque hæc proportio eodem modo demonstratur de omnibus rectis in superficie trunci $RQDC$ ad basem $BEFC$ perpendicularibus, ad omnes circumferentias circularum ab earum punctis infimis in circumrotatione descriptas; atque ex omnibus illis rectis constat ipsa superficies trunci, & ex omnibus circumferentiis circularum ab infimis rectarum punctis seu a baseos ambitu descriptis, constatur superficies solidi rotundi orti ex rotatione baseos circa axem IK ; & ideo ut una antecedentium ad unam consequentium, nempe OP altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli cuius semidiameter est LP radius rotationis, ita omnes antecedentes, hoc est, superficies trunci $RQDC$, ad omnes consequentes, hoc est, superficiem solidi rotundi orti ex rotatione baseos $DEFC$ circa axem rotationis IK , quod erat demonstrandum. Hoc etiam theorema demonstratur eodem modo de trunco superiore si figura AB concipiatur rotari circa rectam MN .

Patet ex demonstratione superficiem trunci $RQDC$ & superficiem solidi rotundi orti ex rotatione baseos $DEFC$

circa axem rotationis HK , esse quantitates magnitudine & gravitate analogas, quoniam eadem proportio quæ demonstratur esse inter totas, eodem modo demonstratur esse inter partes earum proportionales.

PROP. 25. THEOREMA.

Eisdem positis, supponendo angulum inclinationis, Plani secantis, cum base cylindrici (sopu est) producta, esse semivatum; Dico quadratum semidiametri circuli aequalis superficiem solidi rotundi ad duplum esse superficiem trunci.

Est enim ex precedente, ut altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli cuius semidiameter est radius rotationis, ita superficies trunci ad superficiem solidi rotundi; in hoc autem casu, quando angulus inclinationis est semirectus, altitudo cylindrici est æqualis radio rotationis; & ideo in nostro casu, ut semidiameter ad sui circumferentiam, ita superficies trunci ad superficiem solidi rotundi; ut autem semidiameter ad circumferentiam, ita semissis quadrati semidiametri ad circumferentiam; & ideo ut semissis quadrati semidiametri ad circumferentiam, ita superficies trunci ad superficiem solidi rotundi; & conuertendo & permutando, circulus est ad superficiem solidi rotundi ut semissis quadrati semidiametri ad superficiem trunci; sed circulus supponitur æqualis superficiem solidi rotundi; & igitur semissis quadrati semidiametri illius circuli æqualis est superficiem trunci; & ideo quadratum semidiametri est duplum superficiem trunci, quod demonstrandum erat.

Dux præcedentes propositiones eodem prorsus modo demonstrantur de superficiibus rotundis generis ex rotatione unius vel plurium linearum quarumcunque siue rectarum, curvarum vel mixtarum; huiusmodi non claudendum, semper enim ad superficies cylindrici recti super linea vel lineis

neis a plano reſectas, ſuperficiēs rotundæ ex lineæ vel linq-
rum rotatione genitæ prædictas habent rationes.

PROP. 26. THEOREMA.

*Eiſdem poſitis quæ in antecedente: Dico cubum ſemidiametri ſphæ-
ræ æqualis ſolido rotundo eſſe ad truncum veſtræ ad duo.*

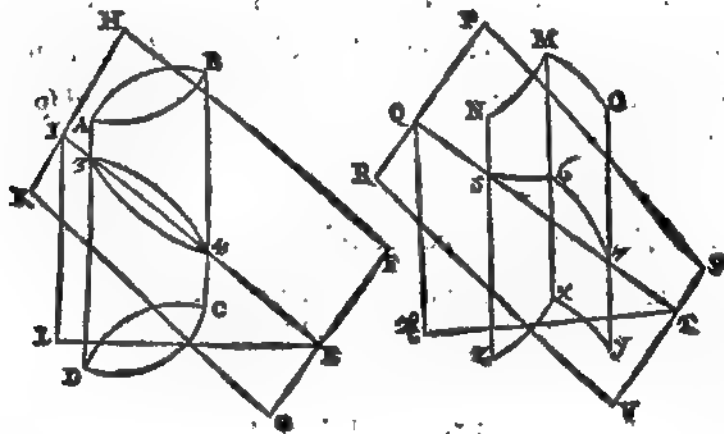
Eſt enim (in hoc caſu) truncus ad ſolidum rotundum vt
ſemidiameter ad ſui circumferentiam, hoc eſt, vt du-
plum quadrati ſemidiametri ad quadruplum circuli, hoc eſt,
vt $\frac{2}{3}$ cubi ſemidiametri ad ſphæram; eſt igitur truncus ad
ſolidum rotundum, vt $\frac{2}{3}$ cubi ſemidiametri ad ſphæram; &
conuertendo & permutando, ſolidum rotundum eſt ad ſphæ-
ram vt truncus ad $\frac{3}{2}$ cubi ſemidiametri; ſed ſphæra ſupponi-
tur æqualis ſolido rotundo; & ideo $\frac{2}{3}$ cubi ſemidiametri
ſphære eſt æqualis trunco, at cubus ſemidiametri ad ſui $\frac{2}{3}$
rationem habet quam 3 ad 2; & ideo cubus ſemidiametri
ſphære ad truncum eandem habet rationem, quod demon-
ſtrandum erat.

PROP. 27. THEOREMA.

*Si duo cylindrici recti, quicunque æquiali, ſecentur a planis qui-
buſcunque, unusquique in duos truncoſ; proportio ſolidi rotun-
di orti ex rotatione baſeos cylindrici circa communem baſeos (ſi
opus eſt) producta cum Plano ſecante interſectionem, ad ſolidum
rotundum ortum ex ſimili alterius cylindrici baſeos rotatione, eſt
compoſita ex directa proportione radiorum rotationis & directa
proportionē truncorum cylindrici inferiorum.*

Sic

Sint duo cylindrici recti æquales $ABCD$, $NMOYXZ$, ubi
 subus DC , XYZ , insistentes, & planis interceptis, unus-
 quisque in duos truncos; nempe cylindricus $ABCD$ sit in-
 tersectus a plano $KHFG$ in truncos $AB43$, $43DC$, & cylin-
 dricus $NMOYXZ$ a plano $PSVR$ in truncos $NMO765$, 765
 ZXY . Sint plani $HFGK$ cum basium planis cylindrici paral-
 lellarum (si opus est) productis, DC , OB , intersectiones,
 rectæ KH , GF ; sintque plani $PSVR$ cum planis basium cylin-
 drici parallelogram NMO , ZXY , (si opus est) productis, in-



tersectiones, rectæ RP , VS . Sintque plana rectis FG , SV ,
 normalia, quæ plana secantia intersectant in rectis IE , QT , &
 plana basium DC , ZXY , (si opus est) producta in rectis LE ,
 & T ; sintque anguli LE , QT , recti. Manifestum est ex ho-
 jus 23, positis $HFGK$, $PSVR$, planis secantibus & GF , VS ,
 rotationis axibus, LE , & T , esse rotationis radios. Dico igitur
 solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ DC circa
 GF , esse ad solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ Z
 XY

XY circa VS, in ratione composita ex proportione trunci 34 CD ad truncum 567 YXZ & ex proportione radii rotationis LE ad radium rotationis T. Ratio solidi rotundi orti ex figura DC ad solidum ortum ex figura ZXY, est composita, ex ratione solidi rotundi ex DC orti ad truncum 34 CD, ex ratione trunci 34 CD ad truncum 567 YXZ, & ex ratione trunci 567 YXZ ad solidum rotundum ex ZXY ortum; sed ratio solidi rotundi ex DC orti ad truncum 34 CD est æqualis rationi circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad IL altitudinem cylindrici; & ratio trunci 567 YXZ ad solidum rotundum ex YXZ ortum est æqualis rationi Q²⁵ seu IL altitudinis cylindrici ad circumferentiam circuli ex semidiametro T²⁵ descripti; & proinde ratio solidi rotundi orti ex DC ad solidum rotundum ortum ex ZXY est composita, ex ratione trunci 34 CD ad truncum 567 YXZ, ex ratione circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad rectam IL, & ex ratione rectæ IL ad circumferentiam circuli ex semidiametro T²⁵ descripti; sed hæ duæ postremæ rationes componunt rationem circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad circumferentiam circuli ex semidiametro T²⁵ descripti, quæ eadem est cum ratione semidiametri LE ad semidiametrum T²⁵; & proinde solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ DC circa axem FG est ad solidum rotundum ex rotatione figuræ XYZ circa axem VS in ratione composita ex proportione trunci inferioris 34 CD ad truncum inferiorem 567 YXZ, & ex proportione radii rotationis EL ad radium rotationis T²⁵, quod demonstrandum erat.

P R O P. 38. T H E O R E M A.

Eisdem positis quæ in antecedente; Proportio superficiæ solidi rotundi orti ex rotatione bascos cylindrici circa communem bascos (si opus est) producta cum plano secante intersectionem, ad superficiem

ciem solidi rotundi orti ex simili alterius cylindrici basior rotatione; est composita ex directa proportione radiorum rotationis & directa proportione superficialium truncorum inferiorum.

Figura & preparatio sint eadem sicut in antecedente. Dico superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ DC circa GF esse ad superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ ZXY circa V Sin ratione composita ex proportione superficiei trunci 34 CD ad superficiem trunci 567 YXZ & ex proportione radii rotationis LE ad radium rotationis OT. Ratio superficiei solidi rotundi orti ex figura DC ad superficiem solidi rotundi orti ex figura ZXY est composita; ex ratione superficiei solidi rotundi ex DC orti ad superficiem trunci 34 CD; ex ratione superficiei trunci 34 CD ad superficiem trunci 567 YXZ, & ex ratione superficiei trunci 567 YXZ ad superficiem solidi rotundi ex ZXY orti; sed ratio superficiei solidi rotundi ex DC orti ad superficiem trunci 34 CD est æqualis rationi circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad LL altitudinem cylindrici; & ratio superficiei trunci 567 YXZ ad superficiem solidi rotundi ex YXZ orti est æqualis rationi QO seu LL altitudinis cylindrici ad circumferentiam circuli ex semidiametro TO descripti; & proinde ratio, superficiei solidi rotundi orti ex DC ad superficiem solidi rotundi orti ex ZXY, est composita ex ratione superficiei trunci 34 CD ad superficiem trunci 567 YXZ, ex ratione circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad rectam LL, & ex ratione rectæ LL ad circumferentiam circuli ex semidiametro TO; sed hæc duæ postremæ rationes componunt rationem circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad circumferentiam circuli ex semidiametro TO descripti, quæ eadem est cum ratione semidiametri LE ad semidiametrum TO; & proinde superficies solidi rotundi orti ex rotatione figuræ DC circa axem FG est ad superficiem solidi rotundi orti ex rotatione
figu.

Figuræ XYZ circa axem VS in ratione composita, ex proportionē superficiē trunci inferioris 34 CD ad superficiē trunci inferioris 567 YXZ, & ex proportionē radii rotationis EL ad radium rotationis TO, quod demonstrandum erat.

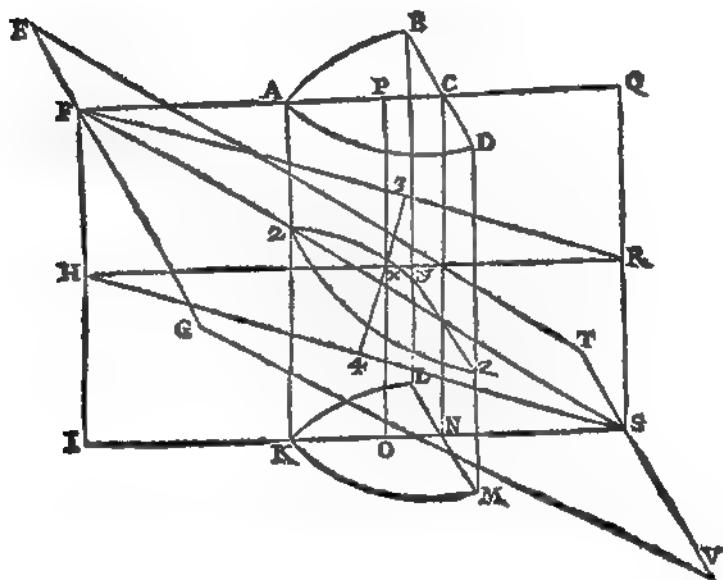
Hoc Theorema etiam locum habet eodemque modo demonstratur in superficiēbus rotundis genitis a rotationē linēæ vel linearum quarumcunque figuram non comprehendunt.

P R O P. 29. T H E O R E M A.

Si super qualibet figura circa axem intelligatur cylindricus reclusus, ita sectus a plano in duos truncos, ut planum per oppositarum cylindrici basium axes ductum, fiat plano secanti normale; truncus unus erit ad truncum alterum reciproce, ut partes radii rotationis resecta a centro gravitatis figura.

SVper qualibet figurā LKM circa axem KN sit cylindricus reclusus ABDMLK sectus in truncos ABDZY₂, ZY₂ KLM, a plano ETVG ad planum ACNK, per oppositarum cylindrici basium axes AC, KN, ductum, normali: sint P, O, centra gravitatis basium oppositarum, quæ iungantur recta PO. Producat planum secans, donec axes AC, KN (si opus est) productos intersecet in punctis F, S, & in eisdem axes (si opus est) productos sint perpendiculares FI, SQ; manifestum est FISQ esse parallelogrammum reſt angulum, item FI esse cylindrici altitudinem, & IS rotationis radium, quippe ad intersectionem plani secantis & baseos LKM nempe rectam TV est perpendicularis, quoniam ducitur in plano FQSI, quod utrique plano & secanti & baseos LKM est normale. Dico truncum ABDZY₂ esse ad truncum 2 YZ MLK ut reciproce IO ad OS. a mediis punctis rectarum FI, QS, nempe H, R, ducantur rectæ HS, RF, necnon HR secans OP in X; erunt itaque inter se parallelæ & $\frac{H}{X} = \frac{R}{X}$

æquales FI, PO, QS, item FQ, HR, IS, item FR, HS. Quoniam FR bifariam secat QS, bifariam quoque secabit in triangulo FQS omnes rectas ipsi QS æquidistantes; & proinde bifariam secabit omnes diametros reſtangularum in trunco AB DZY a plano FISQ normaliter ſecatorum; & ideo tranſibit per centra gravitatis omnium eorundem reſtangularum, cumque ipſe truncus conſtetur ex omnibus iſtis reſtangularis; idcirco tranſibit etiam recta FR per cen-



trum gravitatis ipsius trunci, hoc supponatur esse 3: eodem modo demonstratur in HS esse centrum gravitatis trunci YZ ML₂: cum ergo X medium punctum rectæ OP sit centrum gravitatis totius cylindrici: si a 3 per X producatur recta 3 X 4 donec rectam HS intersecet in 4, erit 4 centrum gravitatis

els trunci $YZMLK_2$; & quia triangula XR_3 ; XH_4 , sunt simi-
lia propter parallellas RF , HS , est ut X_4 ad X_3 ita XH ad X
 R , hoc est, IO ad OS ; sed ut X_4 ad X_3 ita truncus $ABDZY_2$
ad truncum $YZMLK_2$; & proinde ut truncus $ABDZY_2$ ad
truncum $YZMK_2$ ita reciproce IO ad OS , quod demon-
strandum erat.

CONSECTARIUM.

ET proinde componendo totus cylindricus $ABDMLK$
est ad truncum inferiorem $YZMLK_2$ ut radius rotatio-
nis IS ad distantiam inter centrum grauitatis figuræ & axem
rotationis eiusdem nempe OS .

PROP. 30. THEOREMA.

*Eisdem positis qua in antecedente; superficies trunci unius est ad su-
perficiem trunci aliorum reciproce, ut partes radij rotationis
refecta a centro grauitatis perimetri figura.*

EAdem sit figura & præparatio, quæ in antecedente, hoc
solum excepto, quod O , P , puncta nunc supponantur
esse contra grauitatis perimetrorum basium oppositarum.
Dico superficiem trunci $ABDZY_2$ esse ad superficiem trunci
 $YZMLK$, ut reciproce IO ad OS . A medijs punctis rectarum
 FI , QS , nempe H , R , ducantur rectæ HS , RF , necnon HR se-
cans OP in X ; erunt itaque inter se parallellæ & æquales re-
ctæ FI , PO , QS , item FQ , HR , IS , item FR , HS . Quoniam FR
bisariam secat QS , bisariam quoque secabit in triangulo FQ
Somnes rectas ipsi QS æquidistantes, & proinde bisariam
secabit omnes diametros rectorum in trunco $ABDZY_2$
a plano $FISQ$ normaliter secatorum; & ideo transibit per
omnia centra grauitatis oppositorum laterum basi cylindri-
ci perpendicularium vniuscuiusque ex illis rectorum, quo-

H a niam

niam in medio diametri est centrum gravitatis laterum oppositorum; cumq; ipsa trunci superficies confectur ex omnibus istis lateribus oppositis basi cylindrici perpendicularibus, idcirco transibit etiam recta FR per centrum gravitatis superficiei ipsius trunci, hoc supponatur 3: eodem modo demonstratur in HS esse centrum gravitatis superficiei trunci YZMLK₂; cum ergo X medium punctum rectæ OP sit centrum gravitatis totius superficiei cylindrici, si a 3 per X producat^{ur} recta 3X4 donec rectam HS intersecet in 4, erit 4 centrum gravitatis superficiei trunci YZMLK₂: & quia triangula XR₃,XH₄, sunt similia propter parallellas RF, HS, est vt X₄ ad X₃ ita XH ad XR, hoc est IO ad OS; sed vt X₄ ad X₃ ita superficies trunci ABDZY₂ ad superficiem trunci YZMLK₂; & proinde, vt superficies trunci ABDZY₂ ad superficiem trunci YZMLK₂, ita reciproce IO ad OS quod demonstrandum erat.

CONSECTARIUM.

ET componendo tota superficies cylindrici AB DMLK est ad superficiem trunci inferioris YZMLK₂ vt radius rotationis IS ad interceptam inter centrum gravitatis perimetri figuræ & axem rotationis eiusdem nempe OS.

Demonstrantur quoque hæc eodem modo in truncis insistentibus lineæ vel lineis quibuscunque figuram non comprehendentibus, si modo sint ad axem.

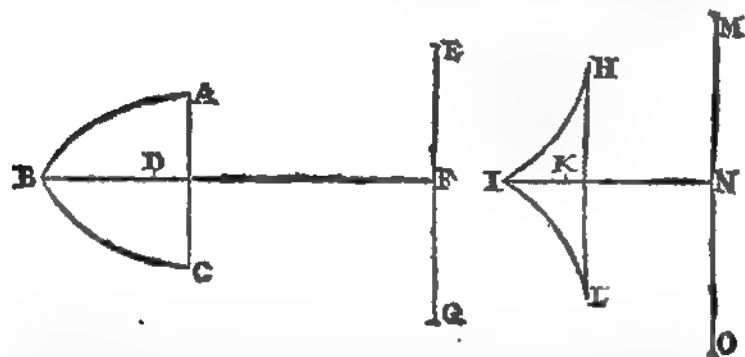
Duæ præcedentes propositiones sunt etiam veræ in omni cylindrico, sed intricata est constructio generali demonstrationi inseruiens, & ideo nostrum intentum alio modo euincemus.

PROP. 31. THEOREMA.

Si sint dua figura quacunque circa axes, quas se rotentur ut axes rotationis sint figura uniuscuiusque axi normales; ratio unius solidi orti ex tali rotatione ad aliud solidum ex eadem genitum, com-

componitur ex ratione directâ figura ad figuram, & ex ratione directâ intercepta inter centrum gravitatis & axem rotationis unius figura ad similem interceptam alterius figura.

Sint duę figurę quęcunque ABC , HIL , circa axes BF , IN , quę rotentur circa rectas EG , MO , axes figurarum (si opus est) producos BF , IN , normaliter secantes in punctis F , N , sintque figurarum ABC , HIL , centra gravitatis D , K . Dico rationem, solidi orti ex figura ABC rotata circa rectâ EG ad solidum ortum ex figura HIL rotata circa rectam MO , componi ex ratione figurę ABC ad figuram HIL & ex ratione DF ad KN . Super figuris ABC , HIL , intelligantur cylindrici recti æquialti secti a planis transeuntibus per EG , MO , rectas, unusquisque in duos truncos nempe superiorem & inferiorem. Ratio solidi ex ABC orti ad solidum ex HIL ortum, componitur ex ratione trunci inferioris cylindrici super ABC ad truncum inferiorem cylindrici super HIL



L , & ex ratione radii rotationis figurę ABC ad radium rotationis figurę HIL ; sed truncus inferior cylindrici super ABC est ad truncum inferiorem cylindrici super HIL in ratione composita, ex ratione trunci inferioris cylindrici super ABC ad totum cylindricum super ABC , ex ratione totius

tius cylindrici super ABC ad totum cylindricum super HIL , & ex ratione totius cylindrici super HIL ad truncum sui inferiorem: sed truncus inferior cylindrici super ABC est ad totum cylindricum, ut FD ad rotationis radium figuræ ABC ex consecutario huius 29 conuertendo, & cylindricus super ABC est ad cylindricum super HIL ut figura ABC ad figuram HIL , item cylindricus super HIL est ad truncum suum inferiorem ut radius rotationis figuræ HIL ad KN , ex consecutivo huius 29; & proinde ratio trunci inferioris cylindrici super ABC ad truncum inferiorem cylindrici super HIL componitur ex ratione rectæ DF ad rotationis radium figuræ ABC , ex ratione figuræ ABC ad figuram HIL , & ex ratione radii rotationis figuræ HIL ad rectam KN : & ideo ratio solidi orti ex rotatione figuræ ABC ad solidum ortum ex rotatione figuræ HIL componitur, ex ratione figuræ ABC ad figuram HIL , ex ratione rectæ DF ad radium rotationis figuræ ABC , ex ratione radii rotationis figuræ ABC ad radiū rotationis figuræ HIL , & ex ratione radii rotationis figuræ HIL ad rectam KN ; sed tres postremæ rationes componunt rationem DF ad KN ; & igitur ratio solidi orti ex rotatione figuræ ABC circa EG ad solidum ortum ex rotatione figuræ HIL circa MO componitur ex ratione figuræ ABC ad figuram HIL , & ex ratione interceptæ inter centrum gravitatis figuræ ABC & eius axem rotationis, nempe DF , ad interceptam inter centrum gravitatis figuræ HIL & eiusdem axem rotationis, nempe KN , quod demonstrare oportuit.

P R O P. 32. T H E O R E M A.

Eisdem positis, qua in antecedente; ratio, superficiæ unius solidi orti ex tali rotatione ad superficiem alterius solidi ex eadem generati, componitur ex ratione directâ perimetrorum figurarum & ex ratione directâ interceptarum inter centra gravitatis perimetrorum & axes rotationis.

Eadem

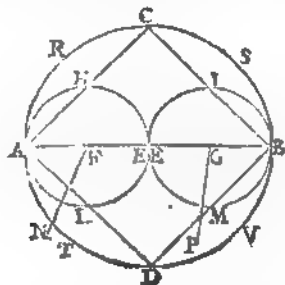
Exdem sint figuræ & præparatio quæ in antecedente; hoc solum excepto, quod D, K, puncta, nunc supponantur esse centra gravitatis perimetrorum figurarum. Dico rationem superficiæ solidi orti ex figura ABC rotata circa rectam EG ad superficiem solidi orti ex figura HIL rotata circa rectam MO, componi ex ratione perimetri ABC ad perimetrum HIL & ex ratione DF ad KN. Super figuris ABC, HIL, intelligantur cylindrici recti æquales, secti a planis transeuntibus per EG, MO, rectas, unusquisque in duos truncos, nempe superiorem & inferiorem. Ratio superficiæ solidi ex ABC orti ad superficiem solidi ex HIL orti, componitur ex ratione superficiæ trunci inferioris cylindrici super ABC ad superficiem trunci inferioris cylindrici super HIL, & ex ratione radii rotationis figuræ ABC ad radium rotationis figuræ HIL; sed superficies trunci inferioris cylindrici super ABC est ad superficiem trunci inferioris cylindrici super HIL in ratione composita, ex ratione superficiæ trunci inferioris cylindrici super ABC ad totam superficiem cylindrici super ABC, ex ratione totius superficiæ cylindrici super ABC ad totam superficiem cylindrici super HIL & ex ratione totius superficiæ cylindrici super HIL ad superficiem trunci sui inferioris: sed superficies trunci inferioris cylindrici super ABC est ad totam superficiem cylindrici ut FD ad rotationis radium figuræ ABC ex consecutario huius 30 convertendo, & superficies cylindrici super ABC est ad superficiem cylindrici super HIL, ut perimenter ABC ad perimetrum HIL, item superficies cylindrici super HIL est ad superficiem sui trunci inferioris ut radius rotationis figuræ HIL ad KN; & proinde ratio superficiæ trunci inferioris cylindrici super ABC ad superficiem trunci inferioris cylindrici super HIL componitur, ex ratione rectæ DF ad radium rotationis figuræ ABC, ex ratione perimetri ABC ad perimetrum HIL & ex ratione radii rotationis figuræ HIL ad rectam KN; & ideo ratio superficiæ solidi orti ex rotatione

*tura di Vela, con altro, che qui pure
divò poco appresso.*

*Ma or frattanto vi dico, e voi stessi,
dal desso, ritroverete, che su questa
medesima Vela Fiorentina si possono as-
segnare altre Vele infinite, ed altre
parte di essa, le quali sien tutte qua-
drabili, quali per esempio sarebbono
col mantener all'intera Vela quella
delle due sue larghezze da' piedi, cioè
quello de' due assi orizzontali dell'Emi-
sfero fra loro a squadra, che congiunge
le cocche, o pur le punte A, B, lembi
estremi della Vela intera, e collo scar-*

*Veli tetragonismo dimostrando, cum
alus, quæ hic etiam non diu post su-
bungere aggrediar.*

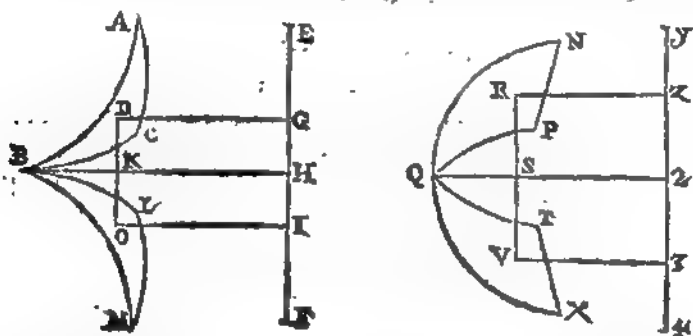
Nunc autem interea moneo, vosque
ipsi ex hæcenus dictis facile deprehen-
detis, super hoc ipso Florentino Velo
infinita alia Vela posse assignari, alias-
que ipsius partes, omnes tetragonismu
capaces (9), quæ exempli gratia fie-
rent servata integro Velo illa suarum
duarum ad pedes latitudinum, illo
scilicet duorum Hemispherii axium
horizontalium, se normaliter invicem
secantium, qui iungit terminos, seu
cuspides A, B, extremos integri Carballi



*ciar l'altra larghezza, o distanza fra
i rimanenti due lembi opposti E, E, col
fargli terminare sull'arco di quel mez-
zo cerchio verticale, (il qual passa per
gli stessi lembi E, E dell'intera) per di-
stanze eguali d'il polo C, o vertice di
tal arco: poichè in tal maniera ciascu-
na di quest'altre infinite Vele, può tref-
te per un verso, che per l'altro, si può
ridurre in quadrato con esattezza geo-
metrica, e far sì, che questa alla Vela
intera abbia qualunque data proporzio-
ne di minoranza, e che perciò ella sia
eguale a qualsiasi dato quadrato minor
di quello dell'asse, a cui è uguale la
Vela intera: essendoci la via stretta,
o secondaria, che vaglia dicesi, alla pri-
maria sia sempre, come la resta con-
giu.*

lumbos, & diminuta altera latitudine,
seu distantia inter duos reliquos oppo-
sitos lumbos E, E, ita ut terminent ad
arcum illius semicirculi verticalis (qui
transit per eisdem integri Carballi lum-
bos E, E) per æqualem utrinque di-
stantiam a polo C, seu vertice talis
arcus: sic enim, quodvis infinitorum
eiusmodi Velorum, uno ex lateribus,
quàm ex alio strictiorum, exactissimè
geometricè quadrari potest. tunc hoc
ad integrum Velum quancumque ob-
tineat datam proportionem minoris
inæqualitatis, ac propere æquale sit
cuiuscumque dato quadrato, minori,
quàm sit quadratum axis, cui integrum
Velum æquale est; quandoquidem
strictius Velum, seu secundarium, si
dicere

Fecit DG, RZ, ducantur rectæ BH, Q₂, figuræ ABC, NQP, tangentes in B, Q; & circa rectas BH, Q₂, sicut axes, concipiantur reuolui figuræ ABC, QN, donec ex altera axium parte planum attingentes, efficiant figuræ BLM, QTX, sibi ipsi æquales, similes, & ad rectas BH, EF; Q₂, Y₄, eandem prorsus positionem habentes: sint figurarum BLM, QTX, centra gravitatis, O, V; ducantur in rectas EF, Y₄, perpendiculares OI, V₃, iungantur quoque rectæ DO, RV, rectas BH, Q₂, intersecantes in punctis K, S: manifestum est pun-



ctum K esse centrum gravitatis integræ figuræ BACBLM circa axem BH, item punctum S esse centrum gravitatis figuræ integræ QNPQTX circa axem Q₂; patet quoque rectas DG, KH, OI; item RZ, S₂, V₃, esse inter se æquales. Quoniâ figuræ BACBLM, QNPQTX sunt circa axes BH, Q₂, axibus rotationis EF, Y₄, normales; igitur solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ BACBLM circa rectam EF est ad solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ QNPQTX in ratione composita ex ratione figuræ BACBLM ad figuram QNPQTX & ex ratione KH ad S₂ per huius 3 r; sed solidum ortum ex figura BACBLM rotata circa EF est duplum solidi orti ex figura BAC circa eandem EF rotata; item solidum ortum ex figura QNPQTX rotata circa rectam Y₄ est duplū

solidi orti ex figura QNP rotata circa eandem Y4: figuræ quoque BACBLM dupla est figuræ BAC, & figura QNPQ TX figuræ QNP; cumque dimidia sint in eadem ratione cum suis duplis; solidum rotundum ortum ex figura ABC rotata circa rectam EF erit ad solidum rotundum ortum ex figura NQP rotata circa rectam Y4 in ratione composita ex ratione figuræ ABC ad figuram NQP & ex ratione KH ad S2, seu DG ad RZ, quod demonstrare oportuit.

CONSECTARIUM.

Sint sequitur, si centra gravitatis figurarum a rotationis axibus æqualiter distent, solida rotunda ex figurarum rotatione genita esse in directa ratione ipsarum figurarum, quod si figuræ ipsæ sint æquales, sequitur solida rotunda ex earum rotatione genita esse in ratione directa interceptarum inter centra gravitatis & rotationis axes: quod si interceptæ sint æquales & figuræ, etiam si inter se dissimillimæ, solida rotunda ex illis orta æqualia erunt.

SCHOLIUM.

EX dictis manifestum est inter duas quascunque figuras tres esse rationes, nempe; figuræ ad figuram, solidi rotundi ex rotatione unius figuræ geniti, ad solidum rotundum ex rotatione alterius figuræ genitum, & interceptæ inter centrum gravitatis & axem rotationis unius figuræ ad similem interceptam alterius figuræ, e quibus duas datas tertiam ignotam semper patefacere.

PROP. 34. THEOREMA.

Si sint duæ figura quæcunque, quæ rotentur circa axes quoscunque; ratio superficiæ unius solidi orti ex tali rotatione ad superficiem alterius

Terminis solidi ex eodem generis, componitur ex directa ratione perimetri ad perimetrum & ex directa ratione intercepta inter centrum gravitatis perimetri & axem rotationis unius figuræ ad similitum interceptam alterius figuræ.

Sint duæ figuræ quæcunque ABC , NQP , quæ rotentur circa rectas EF , $Y4$; sintque contra gravitatis perimetrorum D , K , a quibus in axes rotationis EF , $Y4$, demittantur rectæ perpendiculares DG , RZ . dico rationem superficiæ solidi orti ex figura ABC rotata circa rectam EF ad superficiem solidi orti ex figura NQP rotata circa rectam $Y4$ componi, ex ratione perimetri ABC ad perimetrum NQP & ex ratione DG ad RZ . parallellas rectis DG , RZ , ducantur rectæ BH , $Q2$, figuras ABC , NQP , tangentes in B , Q ; & circa BH , $Q2$, sicut axes concipiantur reuolvi figuræ ABC , QNP , donec ex altera axium parte in idem planum reuoluantur figuras efficiant BLM , QTX , sibi ipsis æquales, similes, & ad rectas BH , EF , $Q2$, $Y4$, eandem omnino positionem habentes. Sint perimetrorum BLM , QTX , centrum gravitatis O , V ; ducantur in rectas EF , $Y4$, perpendiculares OL , $V3$; iungantur rectæ DO , RV , rectas BH , $Q2$, interfecantes in punctis K , S ; manifestum est punctum K esse centrum gravitatis integri perimetri $BACBLM$; estque figura $BACBLM$ circa axem BH ; eodem modo punctum S est centrum gravitatis integri perimetri figuræ $QNPQTX$ circa axem $Q2$; patet quoque rectas DG , KH , OL , item RZ , $S2$, $V3$, esse inter se æquales. quoniam figura $BACBLM$, $QNPQTX$, sunt circa axes BH , $Q2$, axibus rotationis EF , $Y4$, normales; igitur superficies solidi rotundi orti ex rotatione figuræ $BACBLM$ circa rectam EF est ad solidi rotundi superficiem orti ex rotatione figuræ $QNPQT X$ in ratione composita ex ratione perimetri $BACBLM$ ad perimetrum $QNPQTX$ & ex ratione KH ad $S2$; sed superficies solidi orti ex figura $BACBLM$ rotata circa EF est dupla
32
hunc)

P, item superficies solidi rotundi orti ex figura $QNPQTX$ rotata circa rectam $Y4$ est dupla superficiem solidi orti ex figura QNP rotata circa eandem $Y4$; perimetrum quoque $BACBLM$ duplum est perimetri BAC , & perimetrum $QNPQTX$ perimetri QNP (hoc est si figuræ se inuicem tangant in puncto solummodo; quod si se tetigerint in recta linea, oportet imaginari aliquam distantiam inter figurarum vniones, vt generalis fiat demonstratio) cumque dimidia sint in eadem ratione cum suis duplis, superficies solidi rotundi orti ex figura ABC rotata circa rectam EF erit ad superficiem solidi rotundi orti ex figura NQ rotata circa rectam $Y4$ in ratione composita, ex ratione perimetri ABC ad perimetrum NQP & ex ratione KH ad SA seu DG ad RZ , quod demonstrare oportuit.

CONSECTARIVM.

Hinc sequitur, si centra gravitatis perimetrorum a rotationis axibus æqualiter distent, superficies solidorum rotundorum ex rotatione genitorum esse in directa ratione ipsorum perimetrorum, quod si ipsa perimetra sint æqualia, superficies solidorum rotundorum ex rotatione genitorum esse in ratione directa interceptorum inter centra gravitatis perimetrorum & rotationis axes, quod si interceptæ sint æquales & perimetra æqualia, superficies solidorum rotundorum semper esse æquales.

SCHOLIUM.

EX dictis ergo manifestum est inter duas quascunque figuras tres alias esse rationes a tribus precedentibus diuersas, nempe perimetri ad perimetrum, superficiem solidi rotundi ex rotatione vnius figuræ geniti ad superficiem solidi rotundi ex rotatione alterius figuræ geniti, &

in-

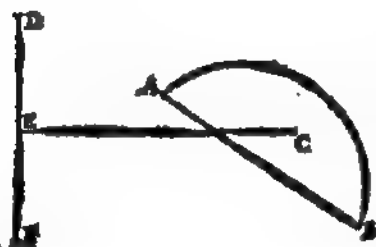
Interceptę inter centrum grauitatis perimetri & axem rotationis vnus figurę ad similem interceptam alterius figurę, e quibus duas datas tertiam ignotam semper patefacere.

Eodem modo demonstrantur hęc omnia vniuersaliter in omnibus, linea, vel lineis figuram non comprehendentibus, ita vt omnium demonstrationum geometricarum hę sint maxime vniuersales.

PROP. 35. THEOREMA.

Omne solidum rotundum aequale est cylindrico recto cuius basis est figura ex cuius rotatione gignitur solidum & altitudo circumferentia circuli in qua circumuoluitur centrum grauitatis figura.

Sit figura quęcunque AB cuius grauitatis centrum C ; ex figurę AB rotatione circa rectam DE fiat solidum rotundum, quod dico esse æquale cylindrico cuius basis AB figura & altitudo circumferentia circuli, in qua circumrotatur centrum grauitatis C . Sit reſt. angulum $HGKI$



cuius centrum grauitatis L ; ex rotatione reſt. anguli $HGKI$ circa latus HI concipiatur fieri cylindrus, & ex grauitatum cen-

centris C, L , in rotationis axes DF, HI , demittantur perpendicularares rectæ CE, LO , quæ sunt rotationis radii: manifestum est cylindrum genitum ex rotatione rectanguli HK circa HI æqualem esse solido cuius basis est circulus ex radio IK & altitudo HI , hoc est solido cuius basis est rectangulum ex IK in semicircumferentiam circuli ex radio IK vel totam circumferentiam ex radio OL & altitudo HI , quod idem est cum solido cuius basis est rectangulum HK & altitudo circumferentia circuli ex radio OL ; sed cylindrus ex rotatione HK circa HI est ad solidum rotundum ex rotatione AB circa DF in ratione composita ex proportionibus figuræ HK ad figuram AB & rectæ OL ad rectam EC seu circumferentiæ radii OL ad circumferentiæ radii EC , atque solidum cuius basis HK & altitudo circumferentia radii OL , seu cylindrus genitus ex rotatione figuræ HK circa HI , est ad solidum cuius basis AB & altitudo circumferentiæ radii EC in eadem ratione; & ideo cylindrus ex rotatione figuræ HK circa HI est ad solidum rotundum ex rotatione figuræ AB circa DF ut idem prædictus cylindrus ad solidum cuius basis AB & altitudo circumferentia circuli ex radio EC ; & proinde solidum rotundum ex rotatione figuræ AB circa DF æquale est cylindrico cuius basis AB & altitudo circumferentia radii EC , quod demonstrare oportuit.

P R O P. 34. T H E O R E M A.

Omnia solidi rotundi superficies aequalis est rectangulo cuius basis est Perimeter figura ex cuius rotatione gignitur solidum & altitudo circumferentia in qua circumferitur centrum gravitatis Perimetri figura.

E Idem positis quæ in antecedente, sint centra gravitatis perimetrorum figurarum HK, AB , puncta L, C ; dico superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ AB circa DF

DF esse æqualem rectangulo cuius basis est perimeter figuræ AB & altitudo circumferentia radii EC. manifestum est superficiem cylindri geniti ex rotatione rectanguli HK circa HI æqualem esse rectangulo cuius basis est circumferentia radii IK & altitudo GK una cum IK, hoc est rectangulo cuius basis circumferentia radii OL & altitudo totus figuræ ambitus HG + GK + KI + IH, quod idem est cum rectangulo cuius basis est rectanguli HK ambitus & altitudo circumferentia radii OL; sed superficies cylindri geniti ex rotatione rectanguli HK circa HI est ad superficiem solidi rotundi geniti ex figuræ AB rotatione circa DF in ratione composita ex proportionibus ambitus figuræ HK ad ambitum figuræ AB & ex proportionibus rectæ OL ad rectam EC seu circumferentiæ radii OL ad circumferentiam radii EC; atque rectangulum cuius basis est ambitus figuræ HK & altitudo circumferentia radii OL, seu superficies cylindri geniti ex rotatione rectanguli HK circa HI, est ad rectangulum cuius basis est ambitus figuræ AB & altitudo circumferentia radii EC in eadem ratione; & ideo superficies cylindri geniti ex rotatione rectanguli HK circa HI est ad rectangulum, cuius basis est ambitus figuræ AB & altitudo circumferentia radii EC, ut idem superficies ad superficiem solidi rotundi geniti ex rotatione figuræ AB circa axem rotationis DF; & proinde superficies solidi rotundi orti ex rotatione figuræ AB circa DF æqualis est rectangulo cuius basis est ambitus figuræ AB & altitudo circumferentia radii EC, quod demonstrare oportuit.

Non dissimili fere methodo demonstratur hæc propositio, etiam si perimeter figuræ non sit clausus.

PROP. 37. THEOREMA.

Si cylindricus rectus secetur plano ad basem seminormali; truncus inferior æqualis erit cylindrico cuius basis eadem est cum cylindrico

drici propofiti bafe, & altitudo, intercepta recta inter centrum gravitatis bafeos & communem interfectionem bafeos & plani fecantis.

S Int eedem figuræ, quæ in antecedente: super figurâ AB (cuius gravitatis centrum C) concipiatur cylindricus rectus Sectus à plano basem AB seminormaliter secante in recta DF: dico truncum eius inferiorem æqualem esse cylindrico super bafe AB habenti altitudinem EC. Solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ AB circa rectam DF æquale est cylindrico cuius bafis AB & altitudo circumferentia radij EC; atque idem solidum rotundum est ad truncum inferiorem cylindrici recti super AB relectam à plano basem AB seminormaliter secante in recta DF ut circumferentia radij CE ad radium CE; sed cylindricus cuius bafis AB & altitudo circumferentia radii CE seu prædictum solidum rotundum est ad cylindricum cuius bafis AB & altitudo EC, ut circumferentia radii EC ad EC; & proinde truncus ille interior relectus æqualis est cylindrico cuius bafis AB & altitudo EC, quod demonstrare oportuit.

PROP. 38. THEOREMA.

Si cylindricus rectus secetur Plano ad basem seminormali; superficies trunci inferioris æqualis erit rectangulo, cuius bafis est perimetre bafeos cylindrici & altitudo intercepta recta inter centrum gravitatis Perimetri bafeos & communem interfectionem bafeos & plani fecantis.

E Isdem positis quæ in antecedente, fit C centrum gravitatis perimetri bafeos AB. Dico superficiem trunci inferioris æqualem esse rectangulo cuius bafis est ambitus figuræ AB & altitudo recta EC. Superficies solidi rotundi generati ex rotatione figuræ AB circa DF æqualis est rectangulo cuius

Cuius basis est ambitus figuræ AB & altitudo circumferen-
 tia radii BC ; atque eadem superficies solidi rotundi est ad
 superficiem trunci inferioris cylindrici recti super AB rese-
 cti a plano basem AB seminormaliter secante in recta DF ,
 ut circumferentia radii C ad CE ; sed rectangulum cuius
 basis est ambitus figuræ AB & altitudo circumferentia radii
 E C seu superficies solidi rotundi geniti ex rotatione figuræ
 AB circa D F est ad rectangulum cuius basis est ambitus fi-
 guræ AB & altitudo EC , ut circumferentia radii EC ad EC ;
 & proinde superficies trunci inferioris resecti æqualis est re-
 ctangulo cuius basis est ambitus figuræ AB & altitudo EC ,
 quod demonstrare oportuit.

Eodem modo demonstratur hæc propositio, si superficies
 cylindrici recti insitæ lineæ vel lineis perimetrum non clau-
 dentibus.

SCHOLIUM.

IN duabus præcedentibus eisdem mediis demonstratur,
 quomocunque secetur cylindricus, in prima, trun-
 cum inferiorem esse æquale cylindrico eandem cum propo-
 sito basem habenti & altitudinem æqualem perpendiculari
 rectæ ad basem ex eius gravitatis centro excitatæ usque ad
 planum secans; & in secunda, superficiem trunci inferioris
 esse æqualem rectangulo basem habenti æqualem perime-
 tro baseos cylindrici propositi & altitudinem æqualem per-
 pendiculari rectæ ad basem cylindrici propositi ex centro
 gravitatis eius perimetri excitatæ usque ad planum secans.

PROP. 39. THEOREMA.

*Si cylindricus rectus, habens basem ab una parte à recta termina-
 tam, secetur plano per illam rectam, & rosetur basis cylindrici
 circa eandem rectam, ut fiat solidi rotundi portio qualibet; erit
 portionis centrum gravitatis idem cum centro gravitatis artus*

K

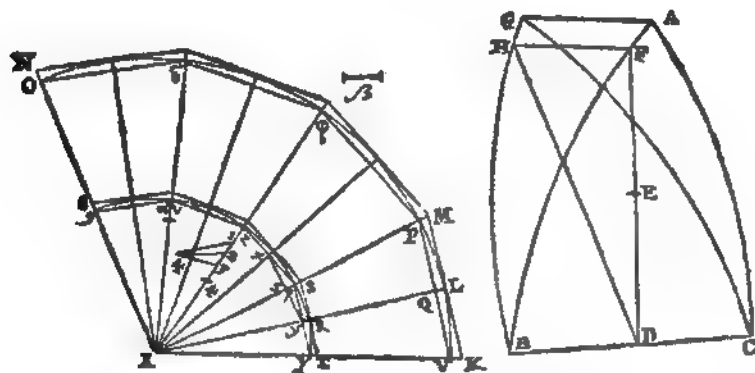
cir.

circularis, in quo circumfertur centrum æquilibrî trunci cylindrici inferioris in cylindrici base notatum.

S It super figura ABC ex una parte a recta BC terminata cylindricus rectus, qui sectus a plano transeunte per rectam BC exhibeat truncum suum inferiorem $BCAG$, cuius centrum æquilibrî in base sit E . Ex rotatione figuræ ABC circa rectam BC fiat portio solidi rotundi: dico portionis centrum gravitatis idem esse cum centro gravitatis arcus circularis in quo circumrotatur punctum E : si non sint eadē, inter illa sit distantia recta β ; & concipiatur portioni solidi rotundi circumscribi solidum polyedrum constans ex 2 vel 4 vel 16, 32, & vel quocunque (dummodo numerus sit in progressionem dupla a binario) æqualibus truncis inferioribus cylindrici propositi recti secti a plano habente communem intersectionem cum base rectam BC , & eidem portioni solidi rotundi inscribi aliud polyedrum priori simile, ita ut eorum centra gravitatis distent intervallo minore quam recta β ; hoc enim possibile est, quoniam talia polyedra quo plura habent latera, eo in infinitum portioni sunt propiora: deinde per centrum æquilibrî E rectæ BC normale ducatur planum faciens cum trunco communem intersectionem triangulum HFD rectangulum ad F , item cum portione solidi rotundi communem intersectionem sectorem circuli $IVLO$, & cum polyedro circumscripto polygoni regularis ad sectorem circumscripti, item cum polyedro inscripto similem portionem polygoni regularis sectori eidem inscripti. Manifestum est radium IV esse æqualem rectæ DF . Radio IV æquali rectæ DE sit sector circuli $IY9$ & sectori $IY9$ circumscribatur polygonum $TS8$ simile polygono KMN , item eidem inscribatur polygonum $\gamma\gamma9$ circumscripto simile. Ducatur recta IL quatuor latera similium polygonorum $\gamma\gamma$, ST , PV , MK , bifariam secans in punctis Y, R, Q, L ; manifestum est triangulum ILK rectangulum ad L esse communem se-

ctio-

tionem plani secantis cum vno æqualium truncorum e quibus constat polyedrum portioni solidi rotundi circumscriptum; quem truncum supponamus esse eundem cum trunco $A\text{-}BCG$ (quod sine absurdo efficere possumus, quoniam omnes trunci inferiores, quorum plana secantia basem secant in recta BC , idem habent in base centrum æquilibrii E) & proinde patet trunci, communem habentis cum plano secante intersectionem $L\text{-}IK$, centrum æquilibrii in base esse punctum R ; eodemque modo probatur punctum R esse in



base centrum æquilibrii trunci, cuius intersectio cum plano secante est ML ; & ideo horum truncorum simul iunctorum centrum gravitatis est R punctum; eodem modo probatur in duobus quibuslibet truncis totius polyedri circumscripti ad vnam superficiem iunctis, variisque simul trunci centrum gravitatis esse in puncto, ubi recta ex vertice I basem trianguli (quod triangulum est communis sectio plani secantis cum duobus iunctis truncis) bifariam secans, arcum circula-rem 99 intersectat: facili quoque negotio probatur punctum Y esse centrum gravitatis duorum truncorum iunctorum,

quorum cum plano secante communis intersectio PIV triangulum; item & punctum X esse centrum gravitatis duorum iunctorum truncorum, quorum cum plano secante communis intersectio ϕ IP triangulum: iungatur recta XY, quæ bifariam secatur in puncto γ ; manifestum est punctum γ esse centrum gravitatis quatuor iunctorum truncorum simul, quorum cum plano secante communis intersectio est trapezium IVP ϕ ; atque punctum γ centrum etiam est gravitatis rectarum Z γ , γ γ , simul: eodem modo probatur α esse centrum gravitatis quatuor iunctorum truncorum simul, quorum cum plano secante communis intersectio est trapezium I ϕ δ O, & etiam rectarum γ γ , Z, simul. Centra gravitatis α γ iungantur recta, quæ bifariam secetur a recta l Z in puncto β ; manifestum est β centrum gravitatis polyedri inscripti esse etiam centrum gravitatis rectarum omnium simul arcui γ γ inscriptarum: eodem modo probatur centrum gravitatis polyedri circumscripti nempe λ idem esse cum centro gravitatis omnium rectarum simul arcui γ γ circumscriptarum. Sit centrum gravitatis portionis solidi rotundi 4, & centrum gravitatis arcus γ γ , 2, quod necessario est in recta l Z inter puncta 1, 3; iungantur rectæ 14, 24, 34. Ex constructione 13 minor est quam 24: angulorum 124, 423, sit maior vel saltem non minor 124, & ideo latus 14 maius erit latere 24, sed 24 maior est quam 13; & proinde 14 maior est quam 13; hoc est, centrum gravitatis portionis solidi rotundi distat a centro gravitatis polyedri sibi circumscripti maiore intervallo quam centrum gravitatis eiusdem polyedri circumscripti distat a centro gravitatis similis polyedri inscripti, quod est absurdum, maiore enim intervallo distant centra gravitatis polyedrorum inscripti & circumscripti quam distant centra gravitatis portionis solidi rotundi & polyedri circumscripti, & proinde nullo intervallo distant centra gravitatis portionis solidi rotundi & arcus circularis γ γ , & ideo idem est eorum centrum gravitatis, quod demonstrare oportuit.

No-

• Notandum in sequentibus nos semper intelligere superficiem portionis solidi rotundi absque planis quibus terminatur.

PROP. 40. THEOREMA.

Eisdem positis quæ in antecedente, erit superficiem portionis solidi rotundi centrum gravitatis idem cum centro gravitatis arcus circularis, in quo circumfertur centrum æquilibrii superficiem trunci cylindrici inferioris in cylindrici base notatum.

Eisdem positis quæ in antecedente, sit superficiem trunci BCAG centrum æquilibrii in base E. Dico superficiem portionis solidi rotundi centrum gravitatis idem esse cum centro gravitatis arcus circularis in quo circumrotatur punctum E: si non sint eadem, inter illa sit differentia recta β ; & concipiatur portioni solidi rotundi circumscribi solidum polyedrum constans ex 2, 4, 8, 16 vel quocunque (dummodo numerus sit in progressionem dupla a binario) æqualibus truncis inferioribus cylindrici propositi recti secti a plano habente communem sectionem cum base rectam BC, & eidem portioni solidi rotundi inscribi aliud polyedrum priori simile, ita ut centra gravitatis eorum superficierum distent minore intervallo quam β ; hoc enim possibile est, quoniam talia polyedra quo plura habent latera eo in infinitum eorum superficies minus inter se discrepant, ita ut eorum differentia minor possit esse quacunque proposita quantitate. Deinde per centrum æquilibrii Erectæ BC normale ducatur planum faciens cum trunco ABCG communem sectionem triangulum HFD rectangulum ad F, item cum portione solidi rotundi communem sectionem, sectorē circuli IVLO & cum polyedro circumscripto portionem polygoni regularis ad sectorem circumscripti, item cum polyedro inscripto similem portionem polygoni regularis sectori eidem inscripti. Manifestum est radium IV esse æqualem rectæ DF: radio ly æquali rectæ DE.

DE sit sector circuli I79, & sect ori I79 circumscribatur polygonum TS8I simile polygono IKMN, item eidem inscribatur polygonum I779 circumscripto simile. Ducatur recta IL latera quatuor parallela similium polygonorum 77, ST, PV, MK, bifariam dividens in punctis Y, R, Q, L; manifestum est triangulum I L K rectangulum ad L esse commune sectionem plani secantis cum vno æqualium truncorum ex quibus constat polyedrum portioni solidi rotundi circumscriptum, quem truncum supponamus esse eandem cū trunco ABCG (quod sine absurdo efficere possumus, quoniam omnes truncorum inferiorum superficies, quorum plana secantia basem secant in recta BC, idem habent in base centrum æquilibrii B) & proinde patet superficiiei trunci, communem habentis cum plano secante intersectionem L I K, centrum æquilibrii in base esse punctum R; eodemque modo probatur punctum R esse in base centrum æquilibrii superficiiei trunci, cuius intersectione cum plano secante est MIL, & ideo horum truncorum simul iunctorum superficiiei centrum gravitatis est R: eodem modo probatur in duobus quibuslibet truncis totius polyedri circumscripti ad vnā superficiem iunctis vtriusque simul superficiiei centrum gravitatis esse in puncto, vbi recta ex vertice I basem trianguli (quod triangulum est communis sectio plani secantis cum duobus iunctis truncis) bifariam secans, arcum circularem 97 interfecat: facili quoque negotio probatur punctum Y esse centrum gravitatis superficiiei duorum iunctorum truncorum, quorum cum plano secante communis intersectio I PV; item & punctum X esse centrum gravitatis superficiiei duorum iunctorum truncorum, quorum cum plano secante communis intersectio p I P triangulum: iungatur recta XY, quæ bifariam secatur in puncto 5; manifestum est punctum 5 esse centrum gravitatis superficiiei quatuor iunctorum truncorum simul, quorum cū plano secante communis intersectio est trapezium IVPp; atque punctum 5 centrum etiam est gravitatis rectarum Z7,

77, simul: eodem modo probatur & centrū gravitatis re-
 ctarum 97, 2, esse centrum gravitatis superficiēi quatuor ina-
 ctarum truncorum simul, quorum cum plano secante com-
 munit intersectio est trapezium I φ δ O. Centra gravitatis α,
 5, iungantur recta α 5, quæ bifariam secetur in 3. manifestum
 est 3 centrum gravitatis superficiēi polyedri inscripti esse
 etiam centrum gravitatis rectorum omnium simul arcui 97
 inscriptorum. eodem modo probatur centrum gravitatis
 superficiēi polyedri circumscripti nempe 1 idem esse cum
 centro gravitatis omnium rectorum arcui 97 circumscripto-
 rum. Sit centrum gravitatis superficiēi portionis solidi ro-
 tundi 4 & centrum gravitatis arcus 97, 2, quod necessario
 est in recta IZ inter puncta 1, 3; iungantur rectæ 14, 24, 34;
 & constructione 13 minor est quam 24; angulorum 124, 423,
 sic maior vel saltem non minor 124, & ideo latus 14 maius
 est latere 24, sed 24 maior est quam 13, & proinde 14 maior
 est quam 13; hoc est, centrum gravitatis superficiēi portio-
 nis solidi rotundi distat a centro gravitatis superficiēi po-
 lyedri sibi circumscripti maiore intervallo quam centrum
 gravitatis superficiēi eiusdem polyedri circumscripti distat
 a cetro gravitatis superficiēi similis polyedri inscripti, quod
 est absurdum, maiore enim intervallo distant centra gravita-
 tis superficiēum polyedrorum inscripti & circumscripti,
 quam distat centrum gravitatis superficiēi portionis solidi
 rotundi a centro gravitatis superficiēi polyedri siue inscripti
 siue circumscripti; & proinde nullo intervallo distant centra
 gravitatis superficiēi portionis solidi rotundi & arcus 97, &
 ideo idem est eorum centrum gravitatis, quod demonstran-
 dum erat.

Eodem modo demonstratur hæc propositio de superficie
 quacunque rotunda facta a rotatione vnius lineę vel plurium
 linearum circa axem; modo radius rotationis illas non secet
 in pluribus punctis.

PROP.

libelli in hac esse punctum G. ex rotatione figuræ ACDK B
 circa rectam AB (ita ut eius pars extrema, nempe figura
 CDKE, describat prædicti solidi rotundi portionem) fiat
 solidi rotundi portio, cuius centrum gravitatis M; manife-
 stum est solidi rotundi portionem genitam a rotatione figu-
 ræ ACDKB esse æquale portionibus, solidi rotundi genitæ à
 rotatione figuræ CDKE (cuius centrum gravitatis L) & soli-
 di rotundi genitæ à rotatione figuræ ACKB (cuius centrum
 gravitatis N) item truncum super figura ACDKB æquale esse
 truncis super figuris CDKE, ACEKB; & proinde patet puncta
 F, H, G, esse in vna recta, item FH esse ad HG ut truncus su-
 per ACEKB ad truncum super CDKE, item puncta L, M, N,
 esse in vna recta, & LM esse ad MN vt portio solidi rotundi
 geniti a figura ACEKB ad portionem solidi rotundi geniti a
 figura CDKE; sed portiones solidorum rotundorum inter se
 sunt in directa ratione truncorū, vt facile colligitur ex huius
 23; & ideo vt FH ad HG ita LM ad MN. per puncta F, L, sit
 recta FLO, & per puncta H, M, recta HMP, item per puncta
 G, N, sit recta GNQ; satis patet rectas HMP, GNQ (cum sint
 radii circularum, in quorum circumferentiis rotantur pun-
 cta H, G,) & ideo rectam etiam FLO esse inter se parallelas
 & rectæ AB normales, & ideo vt PM ad PH vel QN ad QG
 ita OL ad OF; sed M, N, sunt centra gravitatis arcuum cir-
 cularium similium in quibus rotantur puncta H, G, circa cen-
 tra P, Q; & ideo L est etiam centrum gravitatis similis arcus
 circularis in quo rotatur punctum F circa centrum O, atque
 L est etiam centrum gravitatis portionis solidi rotundi ge-
 niti ex rotatione figuræ CDKE circa rectam AB, quod de-
 monstrare oportuit.

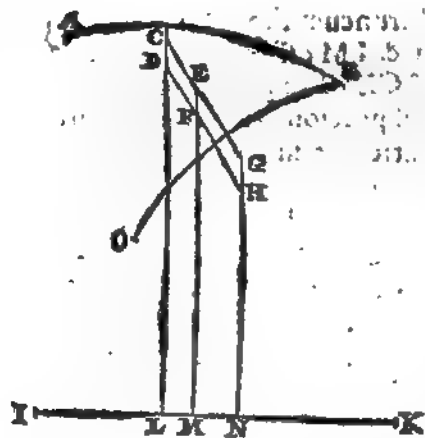
PROP. 43. THEOREMA.

Si linea vel linea quotcumque rotentur circa rectam, vt ex ist genere-
 tur portio superficies rotunda, etiamsi radius rotationis illas non
 quotcumque punctis secuerit; erit portionis superficies rotunda

L cen.

- Centrum grauitatis idem cum centro grauitatis arcus circularis*
 1. in quo circumferetur centrum aequilibrii in base notatae superfi-
 2. ciei trunci cylindrici recti secuti à plano habente communem secun-
 3. dum cum base axem rotationis.

Sit linea, vel lineæ quotcunque ABO , quæ supponantur
 rotari circa axem IK , secanturque in duobus punctis à
 radio rotationis. Super lineis ABO imaginetur superficies
 cylindrica ad basem recta, quæ secetur à plano basem etiam



secante in recta IK , sitque superficiæ trunci inferioris cen-
 trum aequilibrii in base E , ex rotatione linearum ABO hæc
 portio superficiæ rotundæ, cuius centrum grauitatis F dica-
 esse idem cum centro grauitatis arcus circularis in quo ro-
 tatur punctum E , sit B punctum in quo radius rotationis li-
 near ABO tangit, sitque portionis superficiæ trunci superio-
 ris vel lineæ AB centrum aequilibrii in base C , & portionis
 superficiæ rotundæ ex AB genitæ D , sitque superficiæ trun-

et super OB centrum & quilibet in base G , & portionis su-
 perficiet rotundæ ex ægenitæ centrum gravitatis. Et mani-
 festum est puncta C, E, G , esse in eadem recta, item & OB ;
 esse ad EG ut superficies trunci super OB ad superficiem
 trunci super AB : eodem modo pater puncta D, F, H , esse in
 eadem recta, item DF esse ad FH ut portio superficiet rotun-
 dæ genitæ ex OB ad portionem superficiet rotundæ geni-
 tæ ex AB ; sed portiones superficierum rotundarum inter
 se sunt in directa proportionem superficierum truncorum
 ut colligitur ex huius 24; & ideo et CE ad EG ita DF ad FH ,
 producantur rectæ GD, EF, GH , donec rectam IK secant
 in punctis L, M, N ; cum puncta D, H , sint centra gravitatis
 arcuum circularium in quibus rotantur puncta C, G , mani-
 festum est rectas CDL, GHN , esse axi rotationis IK norma-
 les & inter se parallelas; & ideo recta EFM eidem IK est
 est normalis, cum sit ut CE ad EG ita DF ad FH ; & proinde
 ut LD ad LC vel NH ad NG ita MF ad ME , sed D, H , sunt
 centra gravitatis arcuum circularium similium in quibus ro-
 tantur puncta C, G ; & igitur punctum F est etiam centrum
 gravitatis similis arcus circularis in quo rotatur punctum E ,
 quod demonstrandum erat.

Eodem modo demonstratur hoc theorema quando ra-
 dius rotationis lineas secat in tribus punctis supponendo
 hanc propositionem, sicut hæc supponit huius 40 & sic dein-
 cept (quando secatur linea in pluribus punctis) anteriores
 demonstrationes semper supponendo.

PROP. 43. THEOREMA.

Eisdem positis quæ in huius 6; dico solidum rotundum
 genitum ex rotatione figuræ $ABSO$ circa rectam AB
 esse ad cylindrum genitum ex rotatione rectanguli $ABRO$
 circa eandem AB , ut superficies genita ex rotatione curvæ
 AQ circa eandem AB ad circulum ex radio AO . figura $ABSO$
 est proportionaliter analogæ curvæ AQ & ideo centra gra-
 vitatis

vitatis figuræ $ABSO$ & curvæ AQ eodem intervallo distant à rectâ AB , quod intervallum sit K & centra quoque gravitatis rectæ AO & rectanguli $ABRO$ eodem intervallo distant à rectâ AB nempe $\frac{BR}{2}$, atque figura $ABSO$ est ad rectangu-

lum $ABRO$ ut curvâ AQ ad rectam AO , & ideo primam & tertiam ducenda in circumferentiam cuius radius K , & secundam & quartam in circumferentiam cuius radius $\frac{BR}{2}$; erit

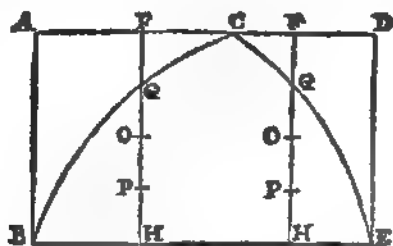
35
huius. cylindricus cuius basis $ABSO$ & altitudo circumferentia ex radio K nempe solidum rotundum genitum ex rotatione figuræ $ABSO$ circa AB , ad cylindricum cuius basis $ABRO$ & altitudo circumferentia radii $\frac{BR}{2}$ nempe cylindrum genitum

36
huius. ex rotatione $ABRO$ circa AB , sicut rectangulum cuius basis AQ & altitudo circumferentia radii K nempe superficies genita ex rotatione AQ circa AB , ad rectangulum cuius basis AO & altitudo circumferentia radii $\frac{BR}{2}$ nempe circulû ex radio AO , quod demonstrare oportuit. ²

PROP. 44. THEOREMA.

Sit figura quæcunque BCE cum rectangulo circumscripto $ABED$, quæ si librentur ex rectâ BE ; dico momentum rectanguli $ABED$ ad momentum figuræ BCE esse ut cylindrus factus ex revolutione rectanguli $ABED$ circa BE ad solidum rotundum factum ex revolutione BCE circa eandem BE . Sit rectæ AB parallela & æqualis quæcunque FH figuram BCE secans in G ; bisecentur rectæ FH , GH , in punctis O , P ; manifestum est momentum rectæ FH esse ad momentum rectæ GH in ratione composita ex ratione FH ad GH & ex ratione OH ad PH , hoc est in duplicata ratione FH ad GH seu ut circulus ex radio FH ad circulum ex radio GH , cumque hoc semper ita eveniat, & primæ & tertiæ semper

per sint eadem; erit, vt momenta omnium FH nempe momentum totius rectanguli ABED ad momenta omnium GH nempe momentum figuræ BCE, ita circuli omnes ex radiis



FH nempe cylindrus ex rotatione rectanguli ABED circa BE ad circulos omnes ex radiis GH nempe solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ BCE circa eandem BE, quod demonstrare oportuit.

PROP. 45. THEOREMA.

Eisdem positis quæ in antecedente; si solida rotundæ orta ex rotatione rectanguli ABED & figuræ BCE circa BE secantur per rectam BE plano quod horizonti sit perpendiculari, & semisolidi ex recta BE librentur: dico momentum semisolidi ADEB esse ad momentum semisolidi BCE vt omnes cubi ab FH ad omnes cubos a GH: sint semicirculorum FH, GH, centra grauitatis O, P; manifestum est momentum semicirculi FH ad momentum semicirculi GH esse in ratione composita ex ratione semicirculi FH ad semicirculum GH nempe ex duplicata ratione FH ad GH & ex ratione OH ad PH seu FH ad GH; & ideo momentum semicirculi FH est ad momentum semicirculi GH in triplicata ratione FH ad GH, seu vt cubus ab FH ad cubum a GH, cumque

que hoc semper ita eueniat, & primæ & tertiæ semper sint eadem; ut momenta omnium semicirculorum FH nempe momentum ipsius semisolidi B A D E ad momenta omnium semicirculorum G H nempe momentum ipsius semisolidi B C E ut omnes cubi ab FH ad omnes cubos a G H, quod demonstrare oportuit.

Hoc Theorema ab acutissimo Geometra R. P. Stephano de Angelis nuper inventum poterit eodem modo demonstrari de qualibet solidi rotundi parte resecta a duobus planis in solidi rotundi axe se invicem secantibus.

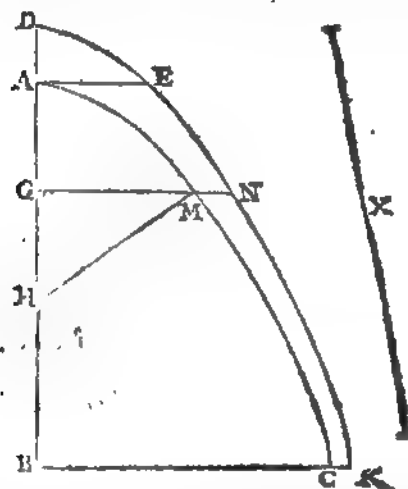
Hæc dicta sint de quantitatum curvarum transmutatione & mensura in genere; nunc accedamus ad applicationem in casibus particularibus, quæ cetræ facilis est, potest enim nullo negotio ab Analysta perfici; sed nos varietati studentes, aliquando purè geometricè, aliquando purè analyticè, aliquando partim geometricè partim analyticè propositum demonstrabimus; hinc enim faciliè percipiet sagax Lector quid in omni casu exhibito agendum sit.

PROP. 46. PROBLEMA.

Invenire circulum aequalem superficiei conoidis Parabolicæ.

SIt conois parabolica genita ex revolutione semiparabolæ ABC circa axem AB; cuius superficiei oportet invenire æqualem circulum. Producat BA in D ut AD sit quarta pars lateris recti, tangatque parabolam in vertice A recta AE æqualis dimidio lateris recti; & axe DB per E ducatur parabola DEK ordinatim applicata BC, productæ occurrant in K: sitque X recta diameter quadrati æqualis segmento parabolico A E K B. dico rectam X esse radium circuli æqualis superficiei conoidis parabolicæ genitæ ex rotatione semiparabolæ ACB circa axem AB. ex quolibet puncto curvæ parabolicæ AC nempe M demittatur in axem ordinatim

applicata MG , quæ producatæ donec exteriorem curvam
parabolicam DEK interfecet in N ; sitque GH recta æqualis
dimidio lateris recti, patet ex multorum demonstrationibus
rectam MH tangentem in puncto M normaliter secare. De-
inde ex doctrina parabolæ asymptotarum a Gregorio
a S. Vincetio & aliis tradita, manifestum est parabolæ ABC ,



DBK , esse asymptotas. 1. & ideo (ex eadem doctrina)
quadratum rectæ GN est æquale quadratis rectarum GM ,
 AE , hoc est, quadratis rectarum GM , GH ; illis autem qua-
dratis æquale est quadratum rectæ MH ; rectæ igitur HM ,
 GN , sunt æquales: cumque hoc semper fiat in omnibus pun-
ctis curvæ parabolicæ AMC , manifestum est ex huius. 3. seg-
mentum parabolicum AEB esse æquale superficiem trunci,
super curvâ AMC sectæ a plano per rectam AB transeunte,
& in angulo semirecto cum parabola seu base trunci inclinā-
te; & igitur cum quadratum rectæ X sit duplum superficiem
trun-

trunci, erit X radius circuli æqualis superficiæ conoidis a rotatione curvæ parabolicæ AMC circa axem AB genitæ, quod demonstrandum erat.

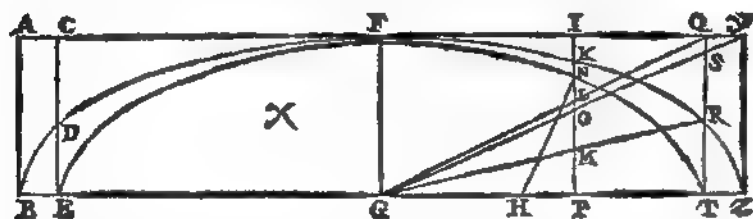
Hinc etiam manifestum est centrum gravitatis superficiæ conoidis parabolicæ idem esse cum centro æquilibrii segmenti parabolici $AENKB$ in axe AB : est enim segmentum $AENKB$ magnitudine & gravitate analogum cum superficiæ trunci ex huius 3, & superficies trunci est magnitudine & gravitate analogæ cum superficie conoidis ex huius 24. Sed ex hac ipsa propositione sequitur illa analogia in magnitudine & gravitate, quoniam eadem quæ demonstrantur de integris eodem modo demonstrantur de partibus earum proportionalibus v. g. eodem modo demonstratur sectionem superficiæ conoidis parabolicæ genitæ ex revolutione curvæ MC esse æqualem circulo cuius radii quadratum duplum est segmenti $GNKB$, quo demonstrata est præsens propositio.

PROP. 47 . PROBLEMA .

Invenire circulum æqualem superficiæ sphaeroidis oblongæ.

SIT sphaeroidis oblongæ genita ex revolutione semiellipseos EFT circa axem longiorem ET , cuius superficiæ oportet invenire circulum æqualem. In verticibus T, E , ellipsem tangent rectæ TR, ED , æquales semissis lateris recti: deinde centro G , vertice F per puncta D, R , ducatur ellipsis DFR ; & segmento elliptico $DFRTE$ fiat æquale quadratum, cuius diameter sit X . dico X esse radium circuli æqualis superficiæ sphaeroidis oblongæ propositæ. producatue ellipsis DFR , donec axem ET productum intersecet in punctis Z, B ; facile patet rectas GZ, FG , esse semiaxes coniugatos semiellipseos BFZ . semiellipses tangentes in verticibus B, E, T, Z , ducantur rectæ BA, EC, TQ, ZY , omnes æquales rectæ FG , & iungatur recta $ACFQY$; ducantur quo.

quoque GQ , GR , & GY , quæ QT secet in S . ex quolibet semielipseos datæ puncto N in axem ET sit perpendicularis NP , quæ producatur ut rectam AY secet in I & rectas GY , GR , GQ , in punctis O , M , L , & ellipsem $B F Z$ in K . sit recta PH æqualis rectæ PM , & iungatur HN ; manifestum est (ex fran: a schotten commentariis in Cartesium pag: 214) HN



normaliter secare tangentem ellipseos in puncto N . ob ellipsem FRZ & rectangulum ex semiaxibus $FGZY$, cuius diameter GY , quadratum rectæ QT est æquale quadratis rectarum RT , TS ; cumque rectæ LP , MP , OP , sint in eadem ratione cum rectis QT , RT , ST ; erit quadratum rectæ LP æquale quadratis rectarum MP , OP ; sed quadratum rectæ IP æqualis est quadratis rectarum LP , NP , ob antenominatam proprietatem ellipseos; & ideo quadratum rectæ IP æquale est quadratis rectarum MP , NP , OP , sed quadratum rectæ IP æquale est etiam quadratis rectarum OP , KP ; & proinde quadrata rectarum MP , NP , OP , sunt equalia quadratis rectarum KP , OP ; & equalia auferendo, quadratum rectæ KP æquale est quadratis rectarum MP , NP , seu HP , NP ; sed quadratum rectæ HN æquale est eisdem quadratis; & ideo rectæ HN , KP , sunt equalis; cumque hoc semper fiat in omnibus punctis curvæ ellipticæ EFT , manifestum est ex huius 3 segmentum ellipticum $EDFRT$ esse æquale superficiæ trunci super curvæ EFT sectæ a plano per rectam ET transcurrente, & in angulo semirecto cum base trunci inclinante; & igitur cum

M qua-

quadratum rectæ X sit duplum superficiei trunci erit X radius circuli æqualis superficiei sphæroidis genitæ a rotatione curvæ EFT circa axem ET , quod demonstrare oportuit.

Hinc etiam patet quod superficies sphæroidis sit magnitudine & gravitate analoga cum segmento elliptico $EDFRT$, idem enim quod demonstratur de integris, non dissimili methodo demonstratur de partibus earum proportionalibus v. g. eodem modo demonstratur superficies genita ex rotatione curvæ FN æqualis circulo cuius radii quadratum duplum est segmenti elliptici $EKPG$, quo demonstrata est præfens propositio; quod etiam in tribus sequentibus est intelligendum, cum eadem sit ratio huius & illarum, me enim tædet eadem semper repetere.

PROP. 48. PROBLEMA.

Invenire circulum aequalem superficiei sphæroidis latæ.

SIt sphærois latæ genita ex rotatione semiellipsos $MC R$ circa axem breviorē MR , cuius superficiei oportet invenire æqualem circulum. In verticibus M, R , ellipsem tangant rectæ MA, RD , æquales semissi lateris recti. Deinde centro P , versice C , per puncta A, D , ducatur hyperbolæ ACD , & segmento hyperbolico $ACDRM$ fiat æquale quadratum cuius diameter recta X . dico X esse radium circuli æqualis superficiei sphæroidis latæ propositæ. Sit hyperbolæ asymptota PF rectam DR secans in F , sitque hyperbolam tangens in vertice recta BCG , & iungantur rectæ PD, PG . ex quolibet ellipsos puncto I in axem MR sit perpendicularis IQ , rectas CG, PD, PF, PG , interfecans in punctis H, K, O, L , item hyperbolam interfecans in E . Sit recta QN æqualis rectæ QK ; manifestum est (ex commentariis Francisci a Scotten in Cartesium pag. 214) rectam NI ellipsem tangentem in puncto I normaliter secare. quoniam PF est hyperbolæ

ergo æquales rectæ EQ, IN; cumque hoc semper fiat in omnibus punctis curvæ ellipticæ MCR, manifestum est ex huius
 3 segmentum hyperbolicum ACDRM esse æquale superfici-
 ciei trunci super curvæ ellipticæ MCR & a plano per rectā
 MR transeunte, & in angulo semirecto cum base trunci in-
 clinante; & igitur cum quadratum rectæ X sit duplum super-
 ficiei trunci, erit X radius circuli æqualis superficiiei sphæroi-
 dis latæ genitæ ex rotatione curvæ ellipticæ MCR circa axē
 MR, quod demonstrandum erat.

PROP. 49. PROBLEMA:

Invenire circulum æqualem superficiiei conoidis hyperbolica.

Sit conois hyperbolica genita ex revolutione semihyper-
 bolæ FST circa axem FS, cuius superficiiei oportet inue-
 nire æqualem circulum. In vertice F hyperbolam tangat re-
 ctæ FH æqualis semissi lateris recti. Deinde describatur hy-
 perbola transiens punctum H, idem habens centrum nempe
 D & eundem semiaxem coniugatum nempe DE cum hyper-
 bola proposita FST; sitque hyperbola descripta BHR ordi-
 natim applicatam ST productam secans in R; & segmento
 hyperbolico FHRS fiat æquale quadratum, cuius diameter
 X dico X esse radium circuli æqualis superficiiei conoidis hy-
 perbolicæ propositæ. Sit hyperbolæ propositæ asymptota
 DV, rectam FH productam secans in K, sitque hyperbolæ
 inuentæ asymptota DY, FH etiam productam secans in C,
 & producat recta DH. Ex quolibet hyperbolæ propositæ
 puncto Q axi applicetur ordinatim recta QG, quæ producta
 rectas DH, DV, DY, interfecet in punctis Z, O, L, & hyper-
 bolam inuentam in puncto P; sitque GA æqualis rectæ GZ,
 manifestum est (ex Fran. a Schotten commentariis in Car-
 tesium pag. 216.) iunctam rectam QA tangentem hyperbo-
 lam in puncto Q normaliter secare. Quoniam recta FK hyper-
 bolam

lia auferendo, quadratum rectæ GP æquale est quadratis rectarum GZ, GQ, hoc est, quadratis rectarum GA, GQ; his autem quadratis æquale est quadratum rectæ AQ, æquales ergo sunt rectæ GP, AQ; cumque hoc semper eveniat in omnibus punctis curvæ hyperbolicæ FQT, manifestum est ex huius 3 segmentum hyperbolicum FHRS æquale esse superficiei trunci super curvâ hyperbolica FQT sectæ a plano per rectam FS transeunte, & in angulo semirecto cum base trunci inclinante; & igitur cum quadratum rectæ X sit duplum superficiei trunci, erit X radius circuli æqualis superficiei conoidis hyperbolicæ genitæ ex rotatione curvæ hyperbolicæ FQT circa axem FS, quod demonstrandum erat.

PROP. 50. PROBLEMA.

Si curva hyperbolica rotetur circa axem conjugatum; invenire circulum aequalem superficiei ab illa curva hyperbolica rotata genita.

Sit curva hyperbolica αC , quæ rotata circa axem suum conjugatum FZ gignit superficiem; oportet huic superficiei æqualem circulum invenire. Sit curvæ hyperbolicæ αC centrum Z, vertex α , asymptoton ZD: hyperbolam tangat in vertice α recta αK æqualis semissi lateris recti eiusdem hyperbolæ: sit recta HK rectæ Za parallella & æqualis, quæ producat in indefinitè hyperbolam secans in R & eius asymptoton ZD in M; & in illa sumatur recta HV, cuius quadratum æquale sit quadratis rectarum HK, HK: deinde centro Z vertice α sit hyperbola αVA , quæ producat in indefinitè donec rectam FC A parallelam rectæ Za interfecet in A; & segmento hyperbolico FA Va Z fiat æquale quadratum, cuius diameter Xi dico X esse radius circuli quæriti. Sit hyperbolæ inventæ asymptoton ZB rectam HV secans in L, & ex quolibet hyperbolæ propositæ puncto T in utrumque axem (si opus est) pro-

ratione cum rectis HL, HM, HK; erit etiam quadratum rectæ IP æquale quadratis rectarum IN, IO; & idem quadratum Z a utrinque addendo, erunt quadrata rectarum IP, Z a (hoc est quadratum rectæ IQ) æqualia quadratis rectarum IO, IN, Z a, hoc est quadratis rectarum IO, IT seu IG, IT, hoc est quadrato rectæ TG; sunt ergo æquales rectæ QI, TG; cumque hoc semper eueniat in omnibus punctis curuæ hyperbolicæ a TC, manifestum est ex huius 3 segmentum hyperbolicum FAaZ æquale esse superficiei trunci super curua hyperbolica aTC sectæ a plano per rectam FZ transeunte & in angulo semirecto cum base trunci inclinante; & igitur, cum quadratum rectæ X sit duplum superficiei trunci, erit X radius circuli æqualis superficiei genitæ a rotatione curuæ hyperbolicæ a TC circa axem coniugatum ZF, quod demonstrandum erat.

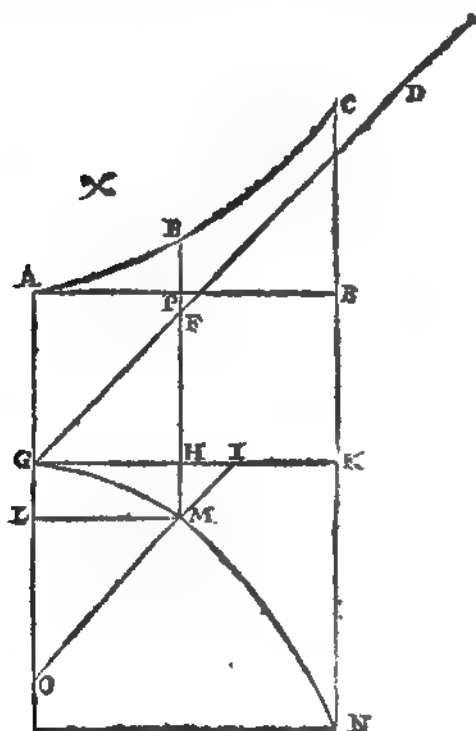
PROP. 51. PROBLEMA.

Inuenire rectam æqualem curuæ Parabolica.

Sit curua parabolica GN, verticem habens G & axem GO, cui oportet rectam inuenire æqualem. Producat axis GO in A, ut GA fiat æqualis semissi lateris recti, sitque GK recta parabolam tangens in vertice & NK axi parallela illi occurrens in K; deinde sit recta GD angulum rectum AGK bifariam diuidens, fiatque hyperbola AC verticem habens A, centrum G & asymptoton GD; producat recta NK donec hyperbolam secet in puncto C, sitque AB rectæ GK parallela, fiat tandem ut rectangulum AEKG ad segmentum hyperbolicum AGKC, ita recta GK ad rectam X; dico rectam X æqualem esse curuæ parabolicæ GN. Ex quolibet curuæ parabolicæ puncto M demittantur in rectas GO, GK, perpendiculares ML, MH, sitque recta OI curuam parabolicam normaliter secans in puncto M, & rectis GO, GK, oc-

current s

Correns in punctis O, I. Manifestum est rectam LO æqualem
 esse semissæ lateris recti seu GA: producat recta MH ut hy-
 perbolam secet in puncto B & asymptoton GD in F, manife-
 stum etiam est ob asymptoton GD quadratum rectæ HB



equale esse quadratis rectarum AG, HF, vel ob angulos
 æquales HGF, HFG, quadratis rectarum LO, GH, seu LO,
 LM; sed quadratum rectæ OM æquale est quadratis rectarū
 OL, LM; & ideo rectæ OM, HB sunt æquales. Deinde ob si-
 mili-

militudinē triangulorum HMI , LOM , est ut HM ad MI ita OL ad OM , seu GA ad HB ; cumque hoc semper fiat in omnibus punctis curvæ parabolicæ GN ; erit ex huius 2 rectangulum $AEKG$ ad segmentum hyperbolicum $ACKG$, ut recta GK ad curvam parabolicam GN ; erat autem ut rectangulum $AEKG$ ad segmentum hyperbolicum $ACKG$, ita recta GK ad rectam X ; & proinde recta X æqualis est curvæ GN , quod demonstrare oportuit.

Eodem modo demonstratur rectangulum $PEKH$ esse ad segmentum hyperbolicum $BHKC$ ut recta HK ad curvam MN ; & proinde segmentum hyperbolicum $ACKG$ est magnitudine & gravitate analogum cum curva GN , quod etiam ex huius 2 est perspicuum; cumque detur facile truncus inferior cylindrici recti super $ACKG$ ex huius 21, 35 & 37 dabitur centrum gravitatis segmenti hyperbolici $ACKG$; & ideo innotescit centrum æquilibrii curvæ GN in recta GK ; hinc quoque notatu digna est analogia in magnitudine & gravitate, quæ contingit inter curvam parabolicam, superficiem sphæroidis latæ & superficiem genitam a rotatione curvæ hyperbolicæ circa axem suum coniugatum, quæ cuiusdens est ex sola figurarum huius 48, 50, 51 inspectione.

PROP. 52. PROBLEMA.

Si curva parabolica vertatur circa rectam, eam in vertice tangentem, invenire circulum æquatam superficies ex tali conversione genita.

Sit curva parabolica IED , cuius vertex D , rotata circa rectam BD eam in vertice tangentem, ut gignat superficiem rotundam: oportet huic superfici invenire circulum æquatam. Sit curvæ parabolicæ latus rectum quadruplum rectæ DR , & eius axis LK . Ex puncto I in axem LK sit recta perpendicularis IK , & axe transversa RD (cui etiam æqualis

23
hucus.

ius 4 semihyperbolam DKL esse æqualem superfici ei trunci super curvâ parabolica DEI sectæ a plano per rectam DB transeunte & in angulo semirecto cum base trunci inclinante; & ideo, cum quadratum rectæ X sit duplum superfici ei trunci, erit X radius circuli æqualis superfici ei genitæ a rotatione curvæ parabolicæ circa rectam DB , quod demonstrandum erat.

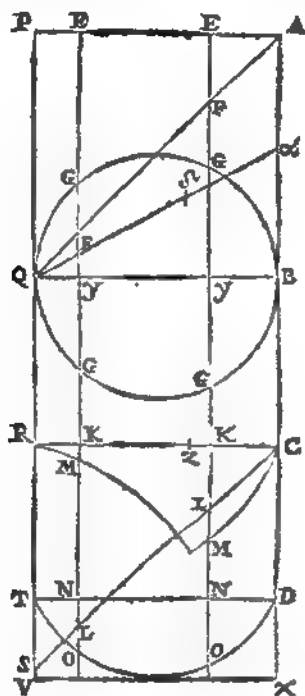
Ex hac propositione patet semihyperbolam DKL esse magnitudine & gravitate analogam cum superficie: ex hac, antecedente & huius 38 non difficile est inuenire centrum gravitatis curvæ parabolicæ vel eius portionis cuiuscunque datæ, quod admonuisse sufficiat.

PROP. 53. PROBLEMA.

Inuenire centrum gravitatis semicylindri recti obliquè secti.

Sit circulus $BGCG$ cylindri basis, cuius diameter BQ ; sitque recta BA circum tangens in A semicylindri altitudo æqualis rectæ BQ , perinde enim est cum omnes semicylindri super eadem base sint analogi, quæ producatur ad partes B indefinitè, sitque ei parallela & indefinitè longa, recta PQ ; fiant etiam AP , CR , DT , parallelæ diametro BQ , & ducatur AQ recta reliquis se habentibus vt in figura. Sic figura CRM talis naturæ, vt (ducta recta quacunque $EYKM$ parallela rectæ PQ) EY sit ad FY vt GY ad KM ; figura CRM est analogâ magnitudine & gravitate semicylindro; atque huius figuræ seu semicylindri centrum æquilibrii ita inueniatur: sint CH , RS , æquales reliquis se habentibus vt in figura, fiatque figura DOT talis naturæ, vt (ducta recta quacunque $EYKMNO$) EY sit ad KL vt KM ad NO ; & figuræ DOT circumscribatur rectangulum DV : sit deinde vt figura CRM ad figuram DOT ita EY seu RC ad CZ , manifestum est ex huius 37 Z esse centrum æquilibrii figuræ CMR : figura autem

tem DO innotescit hoc modo: datur rectangulum DV ,
 quoniam DT est æqualis BQ & DX seu TV est quarta conti-
 nue proportionalium, quarum prima est EY & secunda di-
 midia rectę BQ ; deinde NO est semper quarta continue pro-



portionalium, quarum prima est EY & secunda GY , quod
 sic probo: ex prædictis manifestæ sunt sequentes analogiæ.

$$EY: FY = QY:: GY: KM$$

$$EY: KL = BY:: KM: NO$$

$$EY^2: BY \times YQ = GY^2:: KM \times GY: KM \times NO$$

& ideo $EY^2: GY^2:: GY: NO$, est igitur
 GY

$GY = EY \cdot xNQ$, & proinde posita EY prima & GY secunda, erit NO quarta continue proportionalium, & ideo figura DOT est ad rectangulum DV , ut conois parabolica (cuius basis est circulus $BGQG$) ad cylindricum parabolicum illi conoidi circumscriptum, cumque dentur proportio conoidis parabolice ad cylindricum sibi circumscriptum & rectangulum DV , dabitur quoque figura DOT , & ideo punctum quoque Z , & ideo datur in semicylindri base eius centrum æquilibrii; & proinde semicylindri centrum gravitatis erit in data perpendiculari ad basem e centro æquilibrii excitata, atque idem gravitatis centrum est in recta Qa ducta inter punctum Q & a medium punctum rectæ AB ex puncto B basi BGQ perpendicularis, supposita nempe cylindrum esse sectum a plano baseos planum in recta PQ secante; sit igitur ut RC ad CZ ita Qa ad ad , erit δ semicylindri centrum gravitatis, quod inveniendum erat.

29
humis,

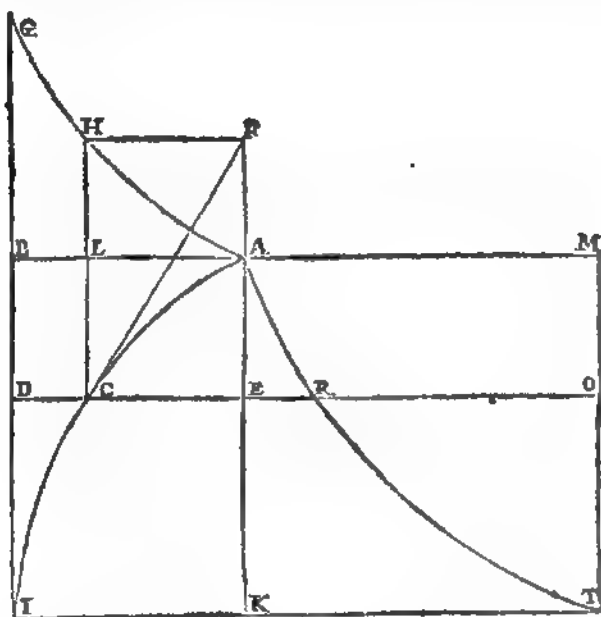
In huius 62 docebimus aliam methodum inveniendi portionem inter DV & DOT .

PROP. 54. THEOREMA.

Sit parallelogrammum $ABIK$, sitque curva ACI talis naturæ, ut (ducta recta quacunq; DE parallela & æquali rectæ AB curvam secante in C) ratio AB ad EC sit multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ad Q . dico parallelogrammum $ABIK$ esse ad figuram $ACIK$ ut $P + Q$ ad Q . producat recta IB in G & iungatur curva AHG talis naturæ, ut (ducta recta CF tangente curvam ACI in quolibet puncto C & ductis, parallelis EC, FH) recta CH sit æqualis & parallela rectæ EF : manifestum est ex huius 7 rectam AE ad FE , seu LC ad HC esse ut P ad Q , cumque hoc semper fiat, evidens est figuram $ACIB$ esse ad figuram $ACIGH$ ut P ad Q ; atque ex huius 11 figura $ACIGH$ est æqualis figuræ $ACIK$, & ideo figura $ACIB$ est ad figuram $ACIK$ ut P ad Q , & com-
po-

ponendo parallelogrammum $ABIK$ est ad figuram $ACIK$
ut $P \div$ Qad Q quod demonstrandum erat.

Si P sit minor quam Q , erit $ACIK$ quælibet ex parabolis infinitis, si vero P sit maior quam Q , erit $ACIK$ quodlibet ex ellipticis infinitis. Ex hac quoque propositione manifestum est parallelogrammum $ABIK$ esse ad figuram $ABIC$ ut P ad Q ; quod etiam ita innotescit, quoniam ratio AB ad EC



est multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ad Q, hoc est ratio AB ad AL est multiplicata rationis BL ad LC in eadem ratione P ad Q, erit conuertendo, BL ad LC multiplicata rationis AB ad AL in ratione Q ad P; & ideo ex ipsa propositione, parallelogrammum ABLC est ad figuram ABIC vs. P \times Q ad P, quod demonstrandum erat.

PLOP.

PROP. 55. THEOREMA.

Eisdem positis, quæ in antecedente: dico rationem figuræ $ACIK$ ad figuram ACE esse multiplicatam rationis IK ad CE in ratione $P \div Q$ ad P . Ex antecedente $ABIK$ est ad $ACIK$, ut $P \div Q$ ad Q ; eodē modo $ALCE$ est ad ACE ut $P \div Q$ ad Q , & ideo $ABIK$ est ad $ACIK$ ut $ALCE$ ad ACE , & permutando $ABIK$ est ad $ALCE$ ut $ACIK$ ad ACE , at ratio $AB : K$ ad $ALCE$ est composita ex ratione AK ad AE & ex ratione IK ad CE , & proinde ratio $ACIK$ ad ACE componitur ex eisdem rationibus; at ratio IK ad CE est multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ad Q & conuertendo, ratio AK ad AE est multiplicata rationis IK ad CE in ratione Q ad P , & componendo, ratio composita ex rationibus AK ad AE & IK ad CE (nempe ratio figuræ $ACIK$ ad figuram ACE) est multiplicata rationis IK ad CE in ratione $P \div Q$ ad P , quod demonstrare oportuit.

PROP. 56. THEOREMA.

Supposito $ABIK$ rectangulo & reliquis positis ut in antecedente, si super figuris $ABIK$, $ACIK$, supponantur cylindrici recti, curus utriusque altitudo AB , item supposito cylindricum super $ACIK$ secari a plano ipsi basi $ACIK$ seminormali, & eam secante in recta AK : dico parallelepipedum super $ABIK$ esse ad inferiorem truncum cylindrici super $ACIK$ ut $4P \div 2Q$ ad Q . Supponatur planum secans cylindricum super $ACIK$ produci ut secet etiam parallelepipedum, manifestum est truncum eius inferiorem esse prisma triangulare parallelepipedum dimidium. Deinde sit rectangulum $AMTK$ cum inscripta linea AKT talis proprietatis, ut (sumpto ad libitum puncto E & ducta recta DEO ipsi AK perpendiculari & lineas ART , ACL secante in punctis R , C ,
item

item ducto per puncto E plano ipsi AK normali & inferiores cylindricorum truncos secante in triangulis reſtangelis iſoſcelibus quorum baſes ſunt DE, CE) OE ſit ad RE ſicut triangulum ſuper DE ad triangulum ſuper CE. Patet triangulum ſuper DE eſſe ad triangulum ſuper CE ſeu OE ad RE in duplicata ratione DE ad CE, atque ratio DE ad CE eſt multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ad Q; & ideo ratio OE ad RE eſt multiplicata rationis AK ad AE in ratione a P ad Q, cumque hoc ſemper fiat vbicunque ſumatur punctum E, patet ex huius 54 reſtangelum AM TK eſſe ad figuram ARTK vt $aP + Q$ ad Q: at OE ſemper eſt ad RE, vt triangulum ſuper DE, nempe communis interſectio plani normalis ad AK cum priſmate triangulari, ad triangulum ſuper CE, nempe communem ſectionem eiſdem prioris plani cū trunco inferiore cylindrici ſuper ACIK; antecedentes quoque quantitates, nempe omnes reſtæ OE inter ſe, & omnia triangula ſuper DE inter ſe, ſunt æquales; & ideo vt omnes reſtæ OE nempe reſtangelum AMTK ad omnes RE nempe figuram ARTK ita omnia triangula ſuper DE nempe priſma triangulare ad omnia triangula ſuper CE nempe inferiorem truncum cylindrici ſuper ACIK; & proinde priſma eſt ad truncum vt $aP + Q$ ad Q, & ideo duplum priſmatis nempe parallelopipedum ſuper ABIK eſt ad inferiorem truncum cylindrici reſti ſuper ACIK vt $4P + 2Q$ ad Q, quod demonſtrandum erat.

Atque ex huius 54 parallelopipedum ſuper ABIK eſt ad cylindricum eiſdem altitudinis ſuper ACIK vt $P + Q$ ad Q hoc eſt vt $4P + 2Q$ ad $\frac{PQ + 2QQ}{P + Q}$, & proinde parallelope-

dum ſuper ABIK eſt ad eiſdem cylindrici truncum ſuperiorem vt $4P + 6PQ + 2QQ$ id $3PQ + QQ$; atque talis truncus ſuperior eſt cum trunco eiſdem cylindrici inferiore reſecto a plano baſem ſecante ſeminormaliter in reſta BI, & ideo huius quoque trunci ad parallelopipedum patet ratio

Q
cio;

fit, nempe ut $3PQ \div QQ$ ad $4PP \div 6PQ \div 2QQ$.

PROP. 57. THEOREMA.

POsito parallelopedo & cylindrico habere altitudinē AK & reliquis ut in antecedente; si cylindricus rectus super ACIK secetur a plano ad basem seminorinali & eam secante in recta AB. Dico parallelopedū super ABIK esse ad inferiorem truncum cylindrici super ACIK in ratione $P \div 2Q$ ad Q . Sit quadratum AMTK cum inscripta linea ART talis naturæ, ut (sumpto ad libitum puncto E & ducta recta DEO ipsi AK perpendiculari & lineam ART secante in puncto R, item ducto per punctum E plano ipsi AK normali, cuius intersectio cum trunco inferiore est rectangulum LAEC) AE sit ad RE sicut BA ad CE. Patet ex constructione rationem AE ad RE esse multiplicatam rationis AK ad AE in ratione P ad Q , & componendo, ratio AK ad RE, hoc est ratio KT ad RE, est multiplicata rationis AK ad AE in ratione $P \div 2Q$ ad Q , & ideo quadratum AMTK est ad figuram ARTK ut $P \div 2Q$ ad Q , at ut ABIK ad AMTK ita IK vel AB ad TK seu AK, & ideo rectangulum ABIK est ad figuram ARTK in ratione composita ex ratione $P \div 2Q$ ad Q & ex ratione AB ad AK. Quoniam AE est ad RE ut BA ad CE, erit rectangulum AE in CE nempe AECL æquale rectangulo AB in RE, cumque hoc semper fiat, erit cylindricus super ARTK habens altitudinem AB æquale inferiori trunco cylindrici super ACIK; & ideo parallelopedum super ABIK cum altitudine AB est ad cylindricum super ARTK seu truncum inferiorem cylindrici super ACIK ut basis ABIK ad basem ARTK, hoc est in ratione composita ex ratione $P \div 2Q$ ad Q & ex ratione AB ad AK, at parallelopedum super ABIK cum altitudine AB est ad parallelopedū super ABIK cū altitudine AK ut AB ad AK; & proinde parallelopedū super ABIK cum altitudine AK est ad truncum inferiorem cylindrici super

per ACIK vt $P \div 2 Q$ ad Q , quod demonstrandum erat.

Atque ex huius 54 parallelopipedum super ABIK est ad cylindricum eiusdem altitudinis super ACIK vt $P \div Q$ ad Q ; hoc est vt $P \div 2 Q$ ad $\frac{QP \div QQ}{P \div Q}$; & ideo parallelopipedum

super ABIK altitudinis AK est ad truncum superiorem cylindrici super ACIK eiusdem etiam altitudinis AK vt $PP \div 3 PQ \div 2 QQ$ ad QQ ; atque talis truncus superior idem est cum inferiore eiusdem cylindrici trunco resecto a plano basem seminormaliter secante in recta IK, & ideo eiusdem parallepipedum ad hunc truncum inferiorem eadem est ratio.

Ex huius 29, 56 & 57 manifestum est centrum æquilibrii figuræ ACIK ita diuidere rectam IK, vt pars versus I sit ad partem versus K in ratione $3P \div Q$ ad $P \div Q$; item centrum æquilibrii eiusdem ACIK ita diuidere AK, ut pars versus A sit ad partem versus K in ratione $P \div Q$ ad Q .

In duabus præcedentibus, etiam si facilitatis gratia supponatur ABIK rectangulum, conclusiones tamen non minus veræ sunt de parallelogrammo quolibet; nullo enim negotio demonstrantur ex æqualitate & analogia in magnitudine & gravitate truncorum super rectangulis & eorum figuris cum truncis super parallelogrammis quibuscunque & eorum figuris; quod etiam in sequentibus de figuris longitudine infinitis intelligi velim.

PROP. 58. PROBLEMA.

Sit AEF angulus rectus sitque curva ADF talis naturæ, vt (ducta recta DC ad libitum perpendiculari ad AE) ratio EF ad CD sit multiplicata rationis AE ad AC in ratione numeri imparis cuiuscunque ad numerum proxime minorem; oportet invenire rectam æqualem curvæ ADF. v. g. sit ratio EF ad CD multiplicata rationis AE ad AC in ratione 5 ad 4; sitque (ope huius 2) ut recta AE ad cuiusdam AF ita rectan-

O 2 gulum

$256c^4$; & proinde trilineum GOLI est $\frac{1024c^4}{1875b^2} + \frac{128c^4}{625b^3}$

$256c^4$, & ideo recta AE est ad curvam AF ut bd seu rectan-

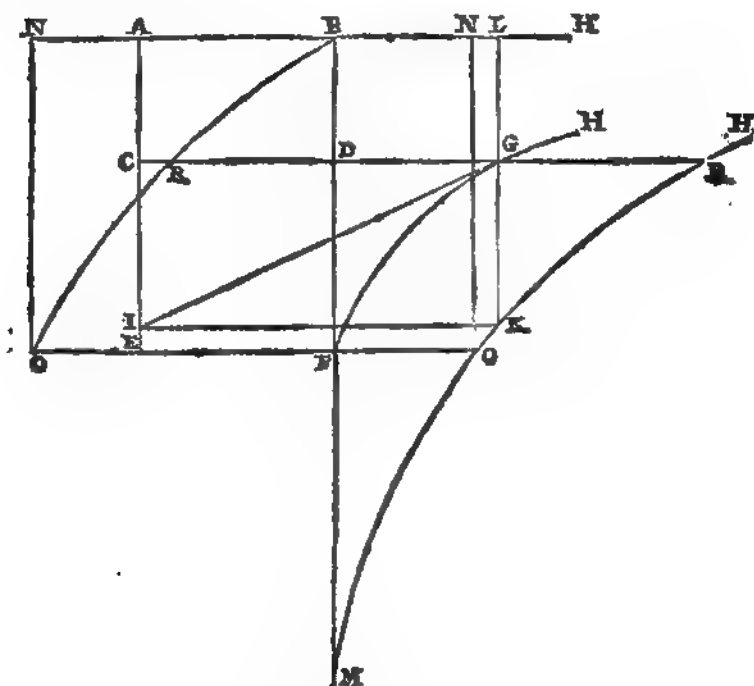
gulum AGNE ad $bd + cd = \frac{1024c^4}{1875b^2} + \frac{128c^4}{625b^3} + \frac{256c^4}{3125b^4}$ seu

mixtilineum AGLE, datur igitur recta æqualis curvæ AF, quæ invenienda erat. Quomodo inveniatur superficies facta ex rotatione curvæ AF circa rectam AG, evidens est ex huius 43. quoniam ex huius 57 facile est invenire centrum gravitatis mixtilinei AGLE, quod si in æquatione reducta, ex una parte inventa fuisset non æ sed æ² (quod semper accidit, si ratio EF ad CD sit multiplicata rationis AE ad AC in ratione numeri parisi ad numerum proxime minorem) inventa fuisset tantum superficies genita ex rotatione curvæ AF circa rectam AG, ut patet ex huius 23 & 43.

PROP. 59. THEOREMA.

Sit parallelogrammum ABFE, sitque curva FGH talis naturæ, ut (ducta recta quacunq; CG parallela rectæ AB curvam FH secante in G & rectam BF in D) ratio AB ad CG sit multiplicata rationis BD ad BF in ratione Pad Q. dico parallelogrammum ABFE esse ad figuram longitudine infinitam HAEFGH ut Q — Pad Q. producaturs recta bF in M & ducatur curva MKH talis naturæ, ut (ducta recta GE tangente curvam FGH in quolibet puncto G & ductis parallelis GC, KI) recta GK sit æqualis & parallela rectæ CI: manifestum est ex huius 7 rectam AC ad CI vel LG ad GK esse ut Pad Q, cumque hoc semper fiat, evidens est figuram HFBH esse ad figuram HFMH ut Pad Q, atque ex huius 11 figura HFMH est æqualis figuræ HAEFH, & ideo figura HAEFH est ad figuram HFBH ut Q ad P, & per conversionem rationis, HAEFH est ad parallelogrammum

num ABFE ut Q ad Q-P, & conuertendo ut parallelo-
grammum ABFE ad figuram HAEFH ita Q-P ad Q, quod
demonstrandum erat.



PROP. 60. THEOREMA.

Supposito ABFE rectangulo & reliquis positis sicut in
antecedente; si super figuris ABFE, HAEFH, suppo-
nantur cylindrici recti, cuius prioris altitudo AB, secundi
autem altitudo infinita, item supposito cylindricum super
HAEFH secari a plano ipsi basi seminormali & eam secante
in recta AE: dico parallelopipedum super ABFE esse ad
inferiorem truncum cylindrici super HAEFH ut $2Q - 4P$
ad

ad Q consideratis considerandis demonstratio non differt
ab huius 56.

PROP. 61. THEOREMA.

Eisdem suppositis cylindricis, qui in antecedente; sed
cum altitudine BF, & supposito cylindricum super H
AEFH secari a plano ipsi basi seminormali & eam secante in
recta AH: dico parallelopipedum super ABFE esse ad infe-
riorem truncum cylindrici super HAEFH in ratione $2Q - P$
ad Q. Sit primò P minor quam Q, sitque ut AB ad CG ita B
D ad DR protractam versus A E, & compleatur quadratum
NBFO ex parte A E, item ex omnibus punctis R imaginetur
curva BRO: patet ex constructione rationem BD ad DR esse
multiplicatam rationis B D ad BF in ratione P ad Q, & diui-
dendo, ratio DR ad BF, nempe ratio D R ad FO, est multi-
plicata rationis BD ad BF in ratione $Q - P$ ad Q, & ideo qua-
dratum NBFO est ad figuram BROF in ratione $2Q - P$ ad ⁵⁴ huius
Q, at ut ABFE ad NBFO ita EF seu AB ad OF seu BF, & ideo
rectangulum ABFE est ad figuram BROF in ratione compo-
sita ex ratione $2Q - P$ ad Q & ex ratione AB ad BF. Quoniam
est ut AB ad CG ita BD ad DR, erit rectangulum AB in DR
æquale rectangulo BD in CG, at rectangulum AB in DR est
communis intersectio cylindrici recti super BROF altitudi-
nem habentis AB cum plano secante super RD ad basem
normali, & rectangulum BD in CG est intersectio eiusdem
prioris plani producti cum trunco inferiore cylindrici super
HAEFH: cumque hæ intersectiones semper contingant esse
æquales, manifestum est inferiorem truncum cylindrici su-
per HAEFH æqualem esse cylindrico super BROF altitudi-
nem habenti AB; & ideo parallelopipedum super ABFE
cum altitudine AB est ad cylindricum super BROF seu trun-
cum inferiorem cylindrici super HAEFH ut basis ABFE ad
basem BROF, hoc est in ratione composita ex ratione $2Q - P$
ad

ad Q & ex ratione AB ad BF , at parallelopipedum super $ABFE$ cum altitudine AB est ad parallelopipedum super eadem $ABFE$ cum altitudine BF ut AB ad BF ; & proinde parallelopipedum super $ABFE$ cum altitudine BF est ad inferiorem truncum cylindrici super $HAEFH$ ut $2Q - P$ ad Q , quod &c.

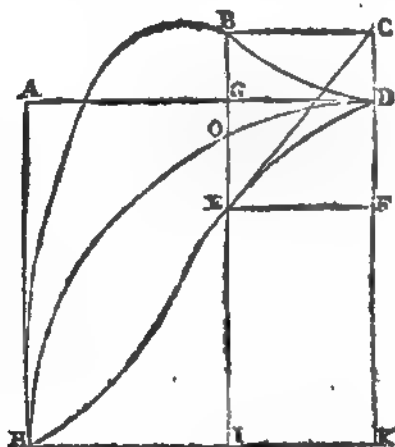
Quod si P sit maior quam Q ; sit ut AB ad CG ita BD ad CR protractam versus LK ; & compleatur quadratum $NAEO$ ex parte LK , item ex omnibus punctis R imaginetur curva ORH : patet ex constructione rationem BD ad CR esse multiplicatam rationis BD ad BF in ratione P ad Q , & sumendo excessum antecedentis supra consequentem ad consequentem, ratio BF ad CR nempe ratio EO ad CR est multiplicata rationis BD ad BF seu AC ad AE in ratione $P - Q$ ad Q ; & ideo quadratum $NAEO$ est ad figuram longitudine infinitam $HAEOH$ ut $2Q - P$ ad Q , at ut $ABFE$ ad $NAEO$ ita EF seu AB ad EO seu BF , & ideo rectangulum $ABFE$ est ad figuram $HAEOH$ in ratione composita ex ratione $2Q - P$ ad Q , & ex ratione AB ad BF . quoniam est ut AB ad CG ita BD ad CR , erit rectangulum AB in CR æquale rectangulo BD in CG , at rectangulum AB in CR est communis intersectio cylindrici recti super $HAEOH$ altitudinem habentis AB cum plano secante super CR ad basem normali, & rectangulum BD in CG est intersectio eiusdem prioris plani cum truncò inferiore cylindrici super $HAEFH$; cumque hæ interfectiones semper contingant esse æquales, manifestum est inferiorem truncum cylindrici super $HAEFH$ æqualem esse cylindrico super $HAEOH$ altitudinem habenti AB , & ideo parallelopipedum super $ABFE$ cum altitudine AB est ad cylindricum super $HAEOH$ seu truncum inferiorem cylindrici super $HAEFH$ ut basis $ABFE$ ad basem $HAEOH$, hoc est in ratione composita ex ratione $2Q - P$ ad Q & ex ratione AB ad BF , at parallelopipedum super $ABFE$ cum altitudine AB est ad parallelopipedum super eadem $ABFE$ cum altitudine BF ut AB ad BF ; & proinde parallelopipedum super $ABFE$ cum
alti-

altitudine BF est ad inferiorem truncum cylindrici super
HAEFH vt $2Q-P$ ad Q , quod demonstrare oportuit.

Ex his & huius 29, 37, non difficile est colligere centrum
æquilibrii figuræ HAEFH ita assignari in recta AH, nempe
AB esse ad distantiam centri æquilibrii à puncto A vt $2Q-4P$
ad $Q-P$; item eiusdem figuræ centrum æquilibrii ita diuide-
re rectam AE ut pars versus A sit ad partem versus E in ra-
tione $Q-P$ ad Q .

PROP. 62. THEOREMA.

Si quadrans circuli KDOH & recta DA parallela radio
HK, sitque curva DEH talis naturæ, vt (ducta recta qua-
cunque GI parallela & æquali rectæ DK curvam circulearem



secante in O & curvam DEH in E) ratio GI & ad EI sit tripli-
cata rationis GI ad OI. dico quadrantem circuli KDOH esse
ad figuram KDEH vt 4 ad 3, hoc est, curvam DEH diuidere
quadrantē circuli in ratione 3 ad 1. ducatur curva HBD talis

P

na

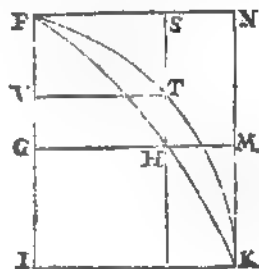
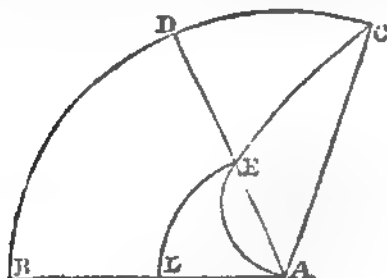
naturæ, ut (ducta recta EC tangente curvam HED in quolibet puncto E & ductis parallelis EF, BC) recta EB sit æqualis & parallela rectæ CF : manifestum est ex huius 7 rectam CF seu BE esse triplam rectæ EO , cumque hoc semper fiat, evidens est figuram $HBDE$ esse triplam figuræ $HODE$, atque ex huius 11 figura $HBDE$ est æqualis figura $HEDK$; & proinde figura $HEDK$ est ad figuram $HODE$ in ratione 3 ad 1, dividit ergo curva HED quadrantem circuli in ratione 3 ad 1, quod demonstrare oportuit.

Quod si ratio GI ad EI esset quintuplicata rationis GI ad OI , curva HED quadrantem circuli divideret in ratione 5 ad 3; si autem septuplicata, in ratione 7 ad 5; & sic in genere, si ratio GI ad EI sit multiplicata rationis GI ad OI in ratione cuiuscunque numeri imparis ad unitatem, curva HED dividet quadrantem circuli in ratione eiusdem numeri imparis ad numerum imparem proximè minorem, quæ omnia demonstrantur sicut hoc theorema. Eodem prorsus modo demonstratur nō solum illa Vallisij interpositio qua spatium cissoidale mensurat in libro de cycloide, sed etiam omnes fortassis aliæ quæ imaginari possunt, supposita primæ interpositæ figuræ mensura. Quod si ratio GI ad EI sit multiplicata rationis GI ad OI in ratione numeri cuiuscunque paris ad unitatem, facile daretur figuræ $KHED$ quadratura ope huius 54, ut docet Vallisius in sua Arithmetica infinitorum; & ideo innotescit in recta DK centrum æquilibrij figuræ $DEHK$ ope huius 37. Hinc etiam evidens est DEF eandem semper habere rationem ad DEO quam habet $DEHK$ ad $DEHO$, quod summopere notandum, nam (præter multa alia pulcherrima problemata) si secetur conois parabolica plano ad axem parallelo, ex data eiusdem ab axe distantia, dabitur huius ope utrumlibet conoidis segmentum.

ratione subdupla, nempe ut quadratum $AILE$ ad figuram $NAGLN$, quod demonstrare oportuit.

PROP. 64. THEOREMA.

Sit circuli sector CAB includens spiralem AEC talis naturæ, ut (ducta recta quacunque AE producta arcum secante in D) ratio AC ad AE sit multiplicata rationis CB ad DB in ratione P ad Q , sit angulus rectus FLK & curva FHK talis naturæ, ut (ducta recta quacunque GH parallela rectæ IK) ratio IK ad GH sit multiplicata rationis FI ad FG in ra-



tionem P ad Q ; patet ex huius 14 rectangulum $FNKI$ figuræ FIK circumscriptum esse ad figuram $FHKI$ ut arcus BC ad axem figuræ spiralis AEC evolutæ, & proinde ex huius 54 arcus BC est ad axem figuræ AEC evolutæ ut $P \div Q$ ad Q , sit ut $P \div Q$ ad Q ita arcus BC ad rectam FI , cui sit normalis recta IK æqualis rectæ AC , sitque figura $FHKI$ talis naturæ, ut (ducta recta quacunque GH parallela rectæ IK) ratio IK ad GH sit multiplicata rationis FI ad FG in ratione P ad $P \div Q$: dico figuram $FHKI$ esse spatium spirale AEC evolutum. Ex rectæ FI quolibet puncto G sit rectæ FI normalis GH occurrens curvæ FHK in H , sitque rectæ GH æqualis AE producta in D . arcus BC est ad axem figuræ AEC evolutæ nempe FI
ut

ut $P \propto Q$ ad Q ; eodemq; modo arcus EL est ad axem figuræ AE evolutæ ut $P \propto Q$ ad Q ; & ideo ut arcus BC ad rectam FI ita arcus LE ad axem figuræ AE evolutæ, & permutando, ut arcus BC ad arcum LE ita recta FI ad axem figuræ AE evolutæ, at ratio arcus BC ad arcum LE est composita ex ratione arcus BC ad BD & ex ratione arcus BD ad arcum LE seu rectæ CA ad rectam EA , & ideo recta FI est ad axem figuræ AE evolutæ in ratione composita ex ratione arcus BC ad arcum BD & ex ratione rectæ CA ad rectam EA ; sed ratio CA ad EA est multiplicata rationis BC ad BD in ratione P ad Q ; & conuertendo, componendo & rursus conuertendo, ratio AC ad AE seu IK ad GH est multiplicata illius rationis (quæ componitur ex ratione arcus BC ad arcum BD & ex ratione rectæ CA ad rectam EA) nempe rationis rectæ FI ad axem figuræ AE evolutæ in ratione P ad $P \propto Q$, sed ratio IK ad GH est multiplicata rationis FI ad FG in ratione P ad $P \propto Q$; & proinde FG est axis figuræ AE evolutæ, suntque EA, GH , æquales; & ideo (cum hoc semper fiat) manifestum est ex huius 14 & eius consecutario figuram $FHKI$ esse figuram AEC evolutam, quod demonstrandum erat.

Figura $FHKI$ est illa descripta in huius 54, cumque poterit inveniri recta illam tangens in puncto dato ope huius 7, poterit quoque (ex consecutario huius 18) recta duci spiralem AEC tangens in puncto dato: sæpissimè etiam (ut patet ex huius 58) inuenitur recta æqualis curvæ FHK , quæ etiam æqualis est spirali curvæ AEC .

Ope huius 15 vel 16 nullo negotio probatur sectorem BAC esse ad spatium spirale AEC ut $P \propto Q$ ad Q .

PROP. 65. THEOREMA.

Sit circuli sector CAB includens spiralem AEC talis naturæ, ut (ducta recta quacunque AE producta arcum secante in D) ratio DE ad BA sit multiplicata rationis CD ad CB

CB in ratione P ad Q, sit FN æqualis rectæ BA; item angulus rectus FNK & curva FK talis naturæ, ut (ducta recta quacunque HM parallela rectæ FN) ratio HM ad FN sit multiplicata rationis KM ad KN in ratione P ad Q, cōpleatur rectangulum FNKI producaturque MH in G; & ducatur recta DA, ita ut DE sit æqualis rectæ HM, & ideo EA æqualis erit rectæ GH. Ratio DE ad BA seu HM ad FN est multiplicata rationis CD ad CB in ratione P ad Q, atque ratio HM ad FN est multiplicata rationis KM ad KN seu IG ad IF in eadem ratione P ad Q; & ideo ut CD ad CB ita IG ad IF, estque ut IK ad GH ita AC ad AE, & ideo (ex huius 14) ut rectangulum FK ad figuram FHKI, hoc est (ex huius 34) ut P ad Q ad P ita arcus BC ad axem figuræ AEC evolutæ, qui sit FI reliquis manentibus ut prius, sitq; curva FTK talis naturæ, ut (ducta recta quacunque STH parallela rectæ FI) IF sit ad ST ut figura FHKI ad figuram FHG. Dico figuram FTKI esse spatium spirale AEC evolutum. Manifestum est constructione rectam FI esse axem figuræ AEC evolutæ; eodemque modo (ut prius ostensum est) demonstratur rectangulum FH esse ad figuram inscriptam FHG ut arcus LE ad axem figuræ AE evolutæ. Ratio FI seu axis figuræ AEC evolutæ ad axem figuræ AE evolutæ est compolita, ex ratione rectæ FI ad arcum BC seu figuræ FHKI ad rectangulum ANKI, ex ratione arcus BC ad arcum BD seu rectæ IF ad rectam FG (quod sic probo, ut CD ad CB ita IG ad IF, & dividendo, & convertendo, ut CB ad BD ita IF ad FG) seu rectanguli FNKI ad rectangulum FNMG, ex ratione arcus BD ad arcum LE seu rectæ DA ad rectam EA nempe rectæ GM ad rectam GH seu rectanguli FNMG ad rectangulum FSHG, & ex ratione arcus EL ad axem figuræ AE evolutæ seu rectanguli FSHG ad figuram FHG; at patet rationem figuræ FHKI ad figuram FHG componi ex eisdem rationibus, & ideo ut FI ad axem figuræ AE evolutæ ita figura FHKI ad figuram FHG, hoc est ut FI ad ST vel FV, est igitur FV
axis

axis figuræ AE evolutæ, cumque ordinatim applicata VT sit æqualis rectæ AE , & hoc semper fiat, ubicumque sumatur punctum E , manifestum est (ex consecratario 14 huius) figuram $FTKI$ esse spatium spirale AEC evolutum, quod demonstrare oportuit.

Ope huius 7 potest duci tangens ad curvam FTK , cum sit e numero earum quas Cartesius appellat geometricas, & proinde potest per huius 2. comparari cum suo axe vel base, cui si reperiatur recta æqualis, erit eadem recta æqualis curvæ AEC ; ut cunque potest semper duci recta tangens curvam AEC in puncto dato ope consecrarii huius 18.

Ex huius 15 & 57 nullo negotio invenitur sectorem BAC esse ad spatium spirale AEC ut $Q^2 + 3PQ + 2P^2$ ad $2P^2$.

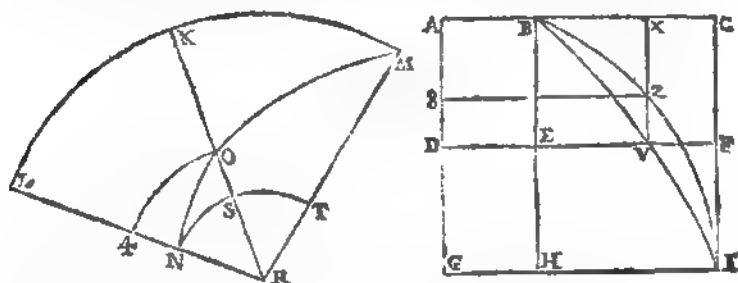
Supposito telluris motu, linea descripta à gravi descendente versus centrum terræ A esset CEA , si modo ratio P ad Q sit dupla; de qua magna orta est controuersia inter celeberrimos Mathematicos $RR. PP.$ Stephanum de Angelis & Ioan. Baptistam Ricciolium, quæ fortasse dirimetur, si consideret doctissimus Ricciolius vires impulsuum esse in directâ proportionem cum velocitatibus, quibus appropinquit corpus mobile ad corpus resistens, abstrahendo ab omni alio motu; mihi enim nihil apparet evidentius; neque ullus est architecturæ militaris peritus, qui præcedens axioma non supponit in tractando de tormentis bellicis. Quod ad controuersiam partem purè geometricam, existimo nullum nunc dubitare, quod graue cadens in centrum terræ tempore sex horarum semper sit extra semicirculum. Evidens est calculum $R. P.$ Stephani de Angelis (dialogo primo pag. 19.) esse legitimum; demonstratio autem $D. Manfredi$ (qua contrarium ostendere conatur pag 17.) in hoc est erronea, quod tacite supponat (ponendo CHA semicirculum) gravis descensum ad centrum terræ durare sex horas; nam centrum attingit (supponendo Riccioli observationes & terræ semidiametrum pedum 25870000) tempore minorum 21 secundis.

cundorum 53; neque in his vilius est momenti siue motus
fiant ab intrinseco vel extrinseco, geometria enim & statica
abstrahunt ab omni causa physica; quippe incerta & non
evidente.

PROP. 66. THEOREMA.

Sit circuli sector LRM, eodemque centro arcus NT simi-
lis arcui LM, sitque spiralis NOM talis naturæ, ut (ducta
recta quacunque RSO) ratio rectæ SO ad rectam TM sit
multiplicata rationis arcus LK ad arcum LM in ratione P ad
Q sit BC æqualis rectæ MT, BH ad libitum, item angulus
rectus CBH, & curva BVI talis naturæ, ut (ducta recta qua-
cunque EV parallela rectæ BC) ratio EV ad BC sit multipli-
cata rationis BE ad BH in ratione P ad Q; compleatur re-
ctangulum BCH, & sit rectangulum ABHG cuius latus AB
æquale rectæ TR: ex huius 54 patet rectangulum BCH esse
ad figuram BVIH ut $P \times Q$ ad Q; ducatur recta DEVF, ita ut
EV sit æqualis rectæ OS, & ideo RO est æqualis rectæ DV.
ratio EV ad HI seu OS ad MT est multiplicata rationis BE ad
BH in ratione P ad Q, sed ratio OS ad TM est multiplicata
rationis LK ad LM in eadem ratione P ad Q, & ideo ut BE ad
BH ita LK ad LM, & ut DV ad GI ita RO ad RM, & ideo ex
huius 14, ut ACIG ad ABVIG ita arcus LM ad axem figu-
ræ MONR euolutæ: sit ut ACIG ad ABVIG ita arcus LM
ad rectam BH reliquis in figura ACIG se habentibus ut prius;
sitque curva BZ I talis naturæ, ut (ducta recta ad libitum
XZV parallela rectæ BH) figura ABVIG sit ad figuram ABVD
ut recta BH ad rectam XZ vel A8. Dico figuram ABZIG esse
spatium spirale RNO Mevolutum. Manifestum est ex con-
structione rectam AG esse axem figuræ RNOM euolutæ; eo-
demque modo (ut prius ostensum est) demonstratur rectan-
gulum AV esse ad figuram ABVD ut arcus 40 ad axem fi-
guræ RNO euolutæ. Ratio AG seu axis figuræ RNOM euo-
lutæ

luta ad axem figuræ RNO evoluta est composita, ex ratione axis figuræ RNO evoluta ad arcum LM seu figuræ $ABVIG$ ad rectangulum $ACIG$, ex ratione arcus LM ad arcum LK seu rectæ IC ad rectam CF vel rectanguli $ACIG$ ad rectangulum $ACFD$, ex ratione arcus LK ad arcum 40 seu rectæ KR ad rectam OR nempe DF ad DV vel rectanguli $ACFD$ ad rectangulum $AXVD$, & ex ratione arcus 40 ad axem



figuræ RNO evoluta seu rectanguli $AXVD$ ad figuram $ABVD$; at perspicuum est rationem figuræ $ABVIG$ ad figuram $ABVD$ componi ex eisdem rationibus, & ideo ut figura $ABVIG$ ad figuram $ABVD$ seu ut AG ad $A8$ ita AG axis figuræ RNO evoluta ad axem figuræ RNO evoluta, qui igitur est 48 ; cumque ordinatim applicata $8Z$ sit æqualis rectæ OR , & hoc semper fiat ubicunque sumatur punctum O , manifestum est (ex Confectario 14 huius figuram $ABZIG$ esse figuram RNO evolutam, quod demonstrare oportuit.

Curva BZI est ex earum numero quas Cartesius appellat geometricas, & igitur per huius 7 potest duci recta eam tangens in puncto dato, potest quoque comparari cum recta ope huius 2, & proinde curva quoque NOM illi æqualis, eique duci tangens in puncto dato.

Ex huius 15 & 36 non difficile erit demonstrare (posita ratione HL ad HG ut P ad Y) sectorem RLM esse ad figuram

Q

RNO

$$\text{RNOM vt P ad Y}^2 \quad \frac{PQ}{P} + \frac{PQ}{2P+Q} + \frac{2PQY}{P^2+2PQ+Q^2}$$

Notandum demonstrationem 65 & 66 huius esse maximè vniuersalem, sed prælo currente non memini illam debito loco inferere.

Hic examinauimus tria spiraliū genera; quorum primū idem est cum illis duobus, quæ mensurauit R. P. Stephanus de Angelis in libro suo de Spiralibus & in fine lib. 5. de parabolis; secundum quoque idem est cum illis duobus, quæ dimensus est in libro de Spiralibus inuersis; tertium etiam excogitauit idem Mathematicus sagacissimus, illudque mihi nuper communicauit.

Summopere notandum omnem figuram posse concipi sicut inuolutam, & methodo nostra inuenietur eadem euoluta; hinc enim non parū augmentetur geometria.

Adeo fertilis est hæc nostra methodus, vt difficile fere sit aliquid proponere illi omnino impervium; quod ut experiamur, soluantur duo illa problemata quæ proposuit Renatus Franciscus Slusius in prop. 8. de infinitis hyperbolis R. P. Stephani de Angelis. Sit AB, b ; BD, a ; sitque secundum tenorem quæstionis, vt b^2 ad $ba - a^2$ ita a^2 ad $\frac{ba^2 - a^4}{b^2}$ quadra-

tum rectæ DC, & ideo (ex huius 54) summa omnium quadratorum ab infinitis DC erit $\frac{b^3}{20}$, ac summa totidè quadrato-

rum rectæ AB est b^3 ; cum itaque hæ quadratorum summae sint duplæ truncorum inferiorum, qui secantur in cylindricis rectis super ACB, AEFB, a plano basi seminormali, erit (ex huius 23) ut b^3 ad $\frac{b^3}{20}$ nempe vt 20 ad 1, ita cylindrus ex

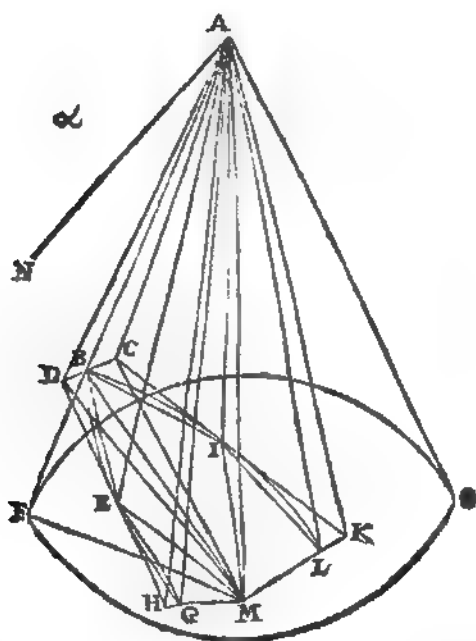
rotatione AEFB circa AB ad solidum rotundum ex rotatione ACB circa eandem AB. Sit secundum propositum vt in eiusdem de infinitis hyperbolis prop. 10. sitque ratio AB ad ED

BD multiplicatâ rationis AD ad DC in ratione Pad Q. fit-
que ratio ABad BD multiplicata rationis EA ad DO in ra-
tione Pad Q. manifestum est EOB esse curvam in huius 54
descriptam; & ideo cubus ex latere EA vel AB est ad infe-
riorem truncum cylindrici recti super EOBA resecti à plano
basem seminormaliter secante in recta EA ut $P^1 \times 3 PQ$
 $\times 2 Q^2$ ad Q^3 ; est autem ut EA ad DO ita ex positione AD
vel KH ad DC; & ideo rectangulum EA in DC æquale est
rectangulo DO in KH, cumque hoc semper fiat, manife-
stum est cylindricum super ACB (cuius altitudo EA) æqua-
lem esse trunco inferiori cylindrici recti super EOBA resecti
a plano basem seminormaliter secante in recta EA, & ideo
ut $P^1 \times 3 P^1 C \times 2 q^1$ ad q^3 ita EABF ad ACB.

Hæc problemata particularia a me selecta sunt tanquam
difficiliora & maioris momenti inter geometrarum inventas,
ultra quædam a me nunc primum soluta; totus namque archi-
medis tractatus de sphaera & cylindro faciliè demonstratur
ex huius 3 ad modum huius 46 & aliquot sequentium; liber
de conoidibus sphaeroidibus & tota Lucæ Valerii doctrina ex
huius 21; tota Guldini, Ioannis de la Paille & Andreæ Tac-
quet doctrina ex huius 35 & aliquot sequentium; fateor ta-
men me nullo modo potuisse inuenire rationem inter curvâ
ellipticam vel hyperbolicam & rectâ, etiamsi in hoc tracta-
tulo multi diuersi sint modi illas examinandi; ita ut facile
credam hanc rationem esse non Analyticâ & vno gradu esse
superiorem illâ inter circulum & diametri quadratum, sed
hoc demonstratu non est adeo facile. Non prætendo hanc
methodum inseruire resolutioni omnium problematum ir-
regularium, quæ infinita sunt numero & difficultate, qualia
præsertim sunt illa de corporum & superficierni sectione
irregulari a planis, vel aliis superficiebus, inter quæ tamen
sequens exhibeo satis pulchrum, placet enim miscellanea
quædam non prorsus inutilia hic adiungere.

PROP. 67. THEOREMA.

Sit conus rectus AFO, cuius axis AM, qui secetur a duobus planis AML, AMG, quorum intersectiones cum conici superficie sint rectæ AL, AG; seceturque adhuc idem conus AFO a plano utcumq; efficiente cum superficie conici communem sectionem GEBIL curuam; ita ut ab his sectionibus



ex cavetur a cono pyramis quædam conica ALMGEBI cuius vertex A & basis figura BILMGEB contenta a tribus planis ALM, AMG, MGEbil, & superficie conica AGEbil; ex
axis

axis puncto M trium planorum communi sectione in latus conī AF sit perpendicularis recta MF. Dico pyramidem (cuius basis est planum æquale superficiēi conicæ AGEBIL & altitudo MF) æqualem esse pyramidi conicæ ALMGEBIL. Si dicat̃ pyramides non sint æquales, sit earum differentia α & pyramidi conicæ inscribatur pyramis AMGEBIL constans ex pyramidibus triangularibus MGEA, MEBA, MBIA, MILA; eidem quoque pyramidi conicæ circumscribatur alia pyramis constans ex pyramidibus triangularibus MHDA, MDCA, MCKA, ita ut differentia pyramidis inscriptæ & circumscriptæ sit minor quam α . Manifestum est pyramidis MHDA altitudinem esse MF, ex suppositione enim triangulum HDA conum tangit, & ideo normalis ex M ad HDA in rectā contractus seu latus conī normaliter cadit: eodem modo probatur MF esse altitudinem, ex vertice M, omnium reliquarum pyramidum triangularium, e quibus conflatur pyramis circumscripta, & ideo pyramis, cuius basis æqualis est omnibus triangulis AHD, ADC, ACK, & altitudo MF, æqualis est pyramidi circumscriptæ, & proinde maior pyramide conica, sed maior etiam est pyramide cuius basis est planum æquale superficiēi conicæ AGEBIL & altitudo MF, quoniam eandem cum illa habens altitudinem, basem habet maiorem, quippe illi (dum conuexa existit) circumscriptā. Deinde pyramis triangularis MGEA (posita vertice M) minorem habet altitudinem quam MF, quoniam eius basis cadit intra superficiem conī, eodem modo omnes pyramides triangulares pyramidem inscriptam componentes minorem habent altitudinem quam MF, & ideo pyramis (cuius altitudo MF & basis æqualis basibus omnium pyramidum triangularium pyramidem inscriptam componentium) maior est pyramide inscripta, sed hæc pyramis minor est pyramide basem habente planum æquale superficiēi conicæ AGEBIL & altitudinem MF, quoniam eandem habens altitudinem basem habet minorem, nempe illi dum conuexa existit inscriptam,

scriptam, & ideo pyramis inscripta multo minor est eadem pyramide basem habente planum æquale superficiæ conicæ AGE BIL & altitudinem MF, sed pyramis inscripta etiam minor est pyramide conica; pyramis igitur inscripta minor est pyramide conica & minor etiam pyramide conicam superficiem basem habente, pyramis verò circumscripta utraque harum pyramidum demonstrata est maior, & ideo maior est differentia inter pyramidem circumscriptam & inscriptam quam inter pyramidem conicam & pyramidem quæ superficiem conicam pro base habet; sed differentia inter pyramidem circumscriptam & inscriptam est minor quam α , & proinde differentia inter pyramidem conicam & pyramidem (quæ superficiem conicam pro base habet) est multo minor quam α , quod est absurdum, ponitur enim α differentia inter duas pyramides; non ergo differunt pyramis conica AMGEBIL & pyramis cuius basis est superficies plana æqualis conicæ superficiæ AGE BIL & altitudo recta MF, & ideo æquales sunt, quod demonstrandum erat.

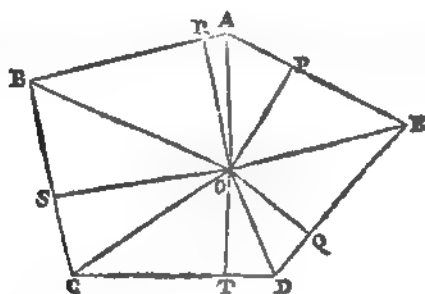
Ex vertice coni A in basem pyramidis conicæ MGE BIL (si opus est) productam demittatur perpendicularis recta AN; manifestum est ex hoc Theoremate MF esse ad AN ut basis pyramidis conicæ MGE BIL ad superficiem conicæ portionem AGE BIL.

PROP. 68. THEOREMA.

Si in rectilineo quocunque aequilatero assignetur punctum, & ab illo puncto in omnia rectilinea latera demittantur perpendiculares recta; erit rectangulum ex semisse summa perpendicularium & perimetro rectilinei ad rectilineum, ut numerus laterum rectilinei ad unitatem.

Sit rectilineum æquilaterum ABCDE: à puncto O intra rectilineum demittantur in omnia rectilinea latera perpen-

pendiculares rectæ OR, OS, OT, OQ, OP. dico rectangulū ex
 semissæ summæ perpendicularium & ambitu rectilinei esse
 ad rectilineum vt numerus laterum ad vnitatem. Ex puncto
 O diuidatur rectilineum in triangula AOB, BOC, COD,
 DOE, EOA, quorum triangulorum bases ex suppositione
 sunt inter se æquales. Triangulum AOB est æquale rectangu-
 lo ex semisse perpendicularis OR & base AB, comque omnia
 rectilinei latera sint æqualia rectæ AB, erit rectangulum ex
 semisse perpendicularis OR & ambitu rectilinei ad rectan-
 gulum ex semisse perpendicularis OR & recta AB seu trian-
 gulum AOB, vt numerus laterum rectilinei ad vnitatem, eo-
 dem modo in quolibet ex reliquis triangulis, vt rectangu-
 lum ex semisse perpendicularis ex trianguli vertice O in ba-
 sem demissæ & ambitu rectilinei ad idem triangulum, ita nu-



merus laterum rectilinei ad vnitatem; cumque omnia trian-
 gula simul sint æqualia ipsi rectilineo, & omnia dicta rectan-
 gula sint æqualia rectangulo ex semissæ summæ perpendicu-
 larium & ambitu rectilinei; erit vt vna antecedentium nempe
 numerus laterum ad vnā consequentium nempe vnitatem,
 ita omnes antecedentes nempe rectangulum ex semisse
 summæ perpendicularium & ambitu rectilinei ad omnes
 con-

consequentes nempe ipsum rectilineum, quod demonstrare oportuit.

CONSECTARIUM.

Hinc sequitur (si in rectilineo æquilatere quocunque assignentur duo puncta & ab eisdem ad omnia rectilinea latera ducantur perpendiculares) perpendiculares ab uno puncto demissas æquales esse perpendiculis ex altero puncto demissis.

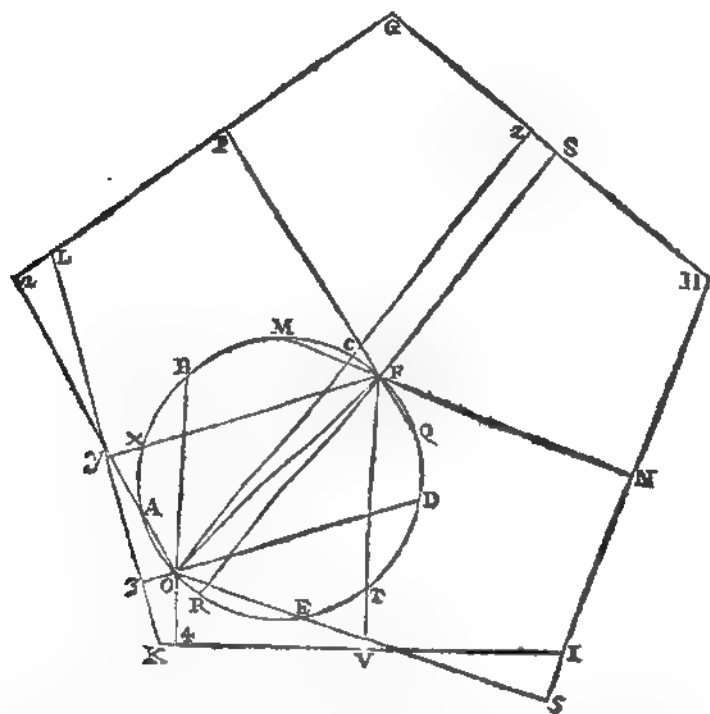
PROP. 69. THEOREMA.

Si circuli circumferentia diuidatur in partes quoscunque æquales & numero impares, & a quolibet peripheria puncto ad omnes eiusdem divisiones rectæ ducantur: si circulus diuidatur in tres partes, æquales, erit summa primarum æqualis ultimæ; si in quinque, erit summa primarum & ultimæ æqualis summa secundarum; si in septem, erit summa primarum & tertiarum æqualis summa secundarum & ultimæ: si in nouem, erit summa primarum, tertiarum & ultimæ æqualis summa secundarum & quarumarum; atque ita deinceps in infinitum.

Dicimus autem rectas primas esse illas, quæ ducuntur ad diuisiones ex utraque parte puncto assignato proximas; secundas, illas rectas quæ ducuntur ad diuisiones primis ex utraque parte succedentes; tertias, quæ secundis succedunt, &c; rectam vero ultimam, illam quæ ducitur ad diuisionem à puncto assignato remotissimam.

Sit circuli circumferentia ABCDE diuisa in partes quoscunque æquales in punctis A, B, C, D, E, sitq; O quodlibet punctum in circumferentia; à quo ad omnes diuisiones ducantur rectæ OA, OE, OB, OD, OC: dico summam primarum & ultimæ nempe OA + OE + OC esse æqualem summæ secundarum nempe OB + OD. Ex puncto O ducatur
cir.

circuli diameter OF , & per punctum F ducantur rectis OA , OB , OC , OD , OE , parallelæ QFP , FTV , RFS , FXV , MFN , & quoniam rectæ OA , OB , OC , OD , OE , efficiunt inter se angulos æquales, igitur rectæ QFP , FTV , RFS , FXV , MFN , efficiunt inter se etiam angulos æquales: centro igitur F de-



scribatur polygonum æquilaterum & æquiangulum GHI KL , cuius latera bifariam & ad angulos rectos secantur a rectis per F ductis; & proinde eadem latera normaliter secantur a rectis per O ductis, prioribus quippe parallelis, & ideo rectæ FP , FS , FN , FV , FY , sunt æquales rectis O_2 , O_5 ,
R

O_1, O_4, O_3 , ex antecedente; atque recta O_2 superat rectam FP excessu AO , & recta O_5 superat rectam FN excessu OE , & recta OZ superat rectam FS excessu CO ; igitur rectæ $O_2 + O_5 + OZ$ superant rectas $FP + FN + FS$ excessu $AO + OE + OC$: recta quoque FY superat rectam O_3 excessu OD , & recta FV superat rectam O_4 excessu OB ; & ideo $FY + FV$ superat $O_3 + O_4$ excessu $OD + OB$; cumque in serie quantitatum $O_2 + O_5 + OZ, FP + FN + FS, FY + FV, O_3 + O_4$ sit æqualis summa extremorum $O_2 + O_5 + OZ + O_3 + O_4$ sit æqualis summa mediorum $FP + FN + FS + FY + FV$; erit differentia inter primam & secundam nempe $OA + OE + OC$ æqualis differentiæ inter tertiam & quartam nimirum $OB + OD$, quod demonstrandum erat.

P R O P. 70. T H E O R E M A.

Si circulus parabolam in pluribus punctis secuerit, e quibus in axem ex utraque parte rectæ perpendiculares demittantur; erit ea ab una parte axis æqualis illis ab altera parte: quod si ab utraque parte in duobus punctis illam secet; erunt similiter duæ ab una parte simul æquales duabus ab altera parte simul.

SIt parabola $PABCG$ quam secet circulus in punctis P, A, B, C , quorum nullum est parabolæ vertex. a punctis P, A, B, C , demittantur in axem eidem ordinatim applicatæ AH, BX, MC, PN : dico ordinatim applicatas ex una parte axis nempe AH, PN , æquales esse ordinatim applicatis ex altera parte axis nimirum rectis BX, CM . Producantur rectæ PA, BC , donec concurrant in D ; eritque rectangulum BDC æquale rectangulo ADP , & igitur rectæ parabolam $PABCG$ tangentes parallelæ rectis DC, DP , æquales erunt, quæ igitur se mutuo interfecerint in parabolæ axe, facientes cum eidem ordinatim applicatis triangula isoscelia; & igitur DP, DC , illis parallelæ faciunt cum eisdem ordinatim

CM tertiam & PN seu GN quartam; & ideo summa primæ & quartæ AH. PN est æqualis summæ secundæ & tertiæ BX
✱ MC, quod demonstrandum erat.

Alii sunt huius theorematum casus, sed in reliquis nulla restat difficultas, modo hic intelligatur.

Hoc theorema interuit cognitioni æquationis cubicæ & quadratoquadraticæ, præcedens autem æquationibus amphibologis, & sinuum compositioni; qui autem desiderat plenam analysin & æquationum doctrinam, expectet absolutissimum D. Caroli Renaldinii opus de Resolutione & Compositione Mathematica, quod nunc est sub prælo.

Hucusque continuavimus speculationes purè geometricas, ut autem videant philosophi geometriam non esse adeo abstractam & inutilem sicut vulgo existimatur, statuimus difficultates quasdam phisicomathematicas ex principiis opticis geometricè enodare.

DE SIDERVM SCINTILLATIONE & magnitudine apparente.

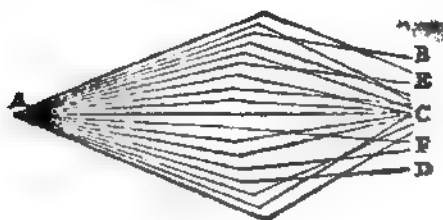
EX optica nostra promota evidens est primo, omnem visionis confusio- nem provenire ex radiorum vnius punctis in retinæ sensibilem particulam incidentia; secundo, quo maior fuerit ista retinæ particula eo maiorem esse visionis confusio- nem.

PROPOSITIO I.

Oculus humanus non potest esse Geometricè perfectus.

SIt punctum aliquod radians A; si oculus humanus esset geometricè perfectus, congregaret omnes radios puncti radiantis A in pupillam incidentes in vnum retinæ punctum geometricum nempe C: ut autem hoc fieret, oportet ut oculus ellet figuræ aliquius geometricæ, sed figuræ

figuræ geometricæ in indivisibili consistunt ; & proinde in corporibus humanis , quæ quotidianis mutationibus sunt obnoxia , locum habere non possunt , ideoque oculus



cum talis figuræ esse non possit non est geometricæ perfectus, & igitur radios à puncto A provenientes non congregat in unicum punctum C, sed in aliquam superficiem nempe BCD.

PROPOSITIO 2.

Propositum sit inquirere, quid efficiat hac oculi imperfectio.

Possumus commodissime naturam assimilare iaculatori perito, qui sagittas à puncto A in scopum C jaculatur ; omnibus enim suis sagittis valde exiguum scopum C attingere non potest , sed aliquando in parva quadam distantia à scopo nempe in B sagittam omittit : unde evenit ut post multas iaculatas sagittas, circiter scopi C punctum medium reperiantur sagittæ quam plurimæ sicut sylvula quædam densissima ; at in paulo maiore distantia à scopo C nempe spatijs E, F, rarior omnino invenitur ista sylvula ; & in extrematibus B, D, videtur rarissima : ita ut generaliter dici possit sylvulam quo magis ad C acceditur esse densiorem, & quo minus esse rariorem. Quod si adhuc multas alias jaculetur

letur sagittas, densior evadet hæc sylvula & versus medium & versus extremitates, sed semper quo magis acceditur ad C erit densior & quo minus rarior, Eodem modo natura radijs lucidis conatur punctum geometricum Cartingere, sed ob suam imbecillitatem seu oculi imperfectiorem cogitur à scopo sæpissime aberrare, hoc tamen sicut peritus iaculator euincens, ut radorum sylvula quo magis acceditur ad medium eo sit densior, & quo minus eo sit rarior: manifestum etiam est quo plures sunt radii, radorum sylvulam eo esse densiorem, ita tamen ut semper densior sit versus medium quam versus extremitates. Hinc colligimus, si punctum radians A debiliter radiet, ita ut vix percipiatur à sensu densior seu media pars sylvulæ C, reliquas sylvulæ partes rariores & minus illustratas non omnino percipi: quod si fortior sit radiatio, rariores etiam sylvulæ partes nempe E & F perceptibiles devenient, quoniam illustrantur sensibiliter ex suppositione: quod si fortissima sit radiatio, rarissima etiam & extremæ partes, nempe B, D, sensibiles fient: ita ut generaliter dici possit, quò fortior sit radiatio eo maiorem apparere sensui communi sylvulam radorum, seu particulam retinæ ab unius puncti radijs depictam.

PROPOSITIO 3.

Quo lucidius est obiectum, eo confusior est eius visio.

QUO lucidius est obiectum, eo fortior sit radiatio unius eius puncti radiantis nempe A; & quo fortior fuerit radiatio, eo maior apparet sensui communi pars retinæ à radijs puncti A illustrata, per huius 2; & proinde per 2 petitionem maior apparet visionis confusio: cumque hoc eodem modo demonstrari possit de omnibus obiecti punctis, manifestum est propositum. Quod si pars retinæ ab unius puncti radius illustrata sit minimum sensibile, distinctissime videtur obic-

obiectum & nulla apparet confusio, vt ex prima huius petitione necessario sequitur.

PROPOSITIO 4.

Eiusdem obiecti confusior est visio in tenebris, quam in luce.

IN tenebris oculi retina a multis radiis non illustratur, & ideo levis illa illustratio versus extremitates superficiei BD facilius percipitur quam in luce, cum exilis illa illustratio à fortissimis lucis radijs plane deleatur: & proinde cum retinæ pars ab vnius puncti radiis illustrata maior videatur in tenebris quam in luce, maior erit (per 2 huius petitionem) visionis confusio in tenebris quam in luce, quod est propositum. Alia etiam ratio esse potest, quod in tenebris maxime dilatetur oculi pupilla, & ideo maior est obiecti in retinam radiatio; & proinde per huius 3 maior etiam visionis confusio. Tertia ratio est, quod in magna pupillæ dilatione plurimi sint radii extrauagantes, vnde confusa etiam oritur visio.

PROPOSITIO 5.

Quo confusior est obiecti visio, eo maior est obiecti magnitudo apparens.

SIT visibile MN, oculi retina AH; supponatur in retina AH depingi confusam imaginem visibilis MN, ita vt radii puncti extremi M incident in retinæ superficiem FG, & radii extremi visibilis puncti N in retinæ superficiem BC; manifestum est magnitudinem visibilis apparentem iudicari secundum quantitatem retinæ BG a radiis totius visibilis illustratæ: quod si cæteris paribus fiet maior imaginis confusio in retina depictæ, radii puncti M non solum incident in superficiem FG, sed in superficiem EH, superficiem FG seu

syl.

sylvulæ medium vndique cingentem; & radii puncti N non solum incident in superficiem BC, sed in maiorem BC vndique cingentem, nempe AD: & in hac visione, manifestum est magnitudinem visibilis apparentem iudicari secundum quantitatem superficiæ AH a radiis visibilis illustratæ, est autem superficies AH maior superficie BG; & proinde obiectum apparet maius in maiore confusione quam in minore, quod demonstrare oportuit.



Atque hæc est ratio quod corporum cælestium diametri maiores appareant, quando sunt magis lucida, quam quando sunt minus lucida; in huius enim tertia demonstratum est obiecta magis lucida (cæteris paribus) magis confusa videri quam obiecta minus lucida, & nunc demonstratur obiecta magis confusa maiora videri (cæteris paribus) quam minus confusa; & igitur obiecta lucida (cæteris paribus) maiora videntur quàm minus lucida. Ex huius etiam s demonstrari potest, quod (cæteris paribus) obiecta minora in maiore proportionem à confusione augmentari videantur quam maiora: Sive enim obiectum sit parvum sive magnum, æquale semper à confusione recipit incrementum, ac æquale ad minus maiorem habet proportionem quam ad maius; & proinde si obiectum sit parvum, augmentatur a confusione in maiore

iore proportione quam si esset magnum. ex his concurren-
 tibus causis patet ratio cur Stellæ fixæ videantur, etiam si
 in tam vasta distantia sint omnino insensibiles: ob validam
 enim earum radiationem & in tenebris visionem, confusissi-
 me ab oculo videntur, & ob insignem earum paruitatem in
 maiore proportione ab hac confusione augmentantur, quam
 si essent maiores; ita ut decies millies forte & amplius ma-
 iores appareant, quam in tali distantia videri debent; nul-
 lius enim telescopi ope in hunc usque diem distinctæ & ter-
 minatæ videri possunt. ob easdem rationes parua candela in
 tenebris e longissimo interuallo videri potest magnitudinis
 satis considerabilis, & sideris instar scintillans. Ex prædi-
 ctis manifesta fit causa, quare scintillent sidera, aliquibus pri-
 mo consideratis: primo scintillationem esse obiecti lucidi
 confusam & tremulam seu mutabilem visionem, aliquando
 enim videtur obiectum maius, aliquando minus, aliquando
 lucidius versus unam partem, aliquando versus aliam: se-
 cundo eius causam esse mutationem aliquam seu tremorem
 in medio, tales enim omnino videmus effectus, cum inter
 oculum & visibile eleuantur vapores vel exhalationes, cuius
 ratio in optica versatum non potest latere: tertio notandum
 est, quod natura dum confusam percipit visionem humores
 oculi stimulet ad motum seu mutationem aliquam, ut con-
 fusioni perceptæ medeatur; cumque natura seu sensus com-
 munis distinctam sentit visionem, oculus suos humores a
 motu impedit, hoc enim rationi, experientiæ, & authoritati
 est consentaneum. Quod si sensus communis distinctam vi-
 sionem sentire non potest, dico oculi humores agitari & to-
 to visionis tempore non quiescere; hoc probari potest ex
 magna lassitudine, quam patitur oculus ex confusa visione;
 neque existimo esse rationi consentaneum, ut sisteret mo-
 tus, dum adhuc viget eius causa, nempe confusio percepta.
 hisce prælibatis, dico scintillationem siderum provenire ex
 hac humorum mutatione, dum frustra conatur oculus distin-

Etiam reddere eorum visionem, motus enim humorum eundem cum motu medii potest exhibere effectum, ut facillime demonstrari potest; probatur; sidera sunt obiecta quæ secundum hæcenus demonstrata confusissime videntur, sed visio confusa oculi humores stimulat ad motum, ergo in visione siderum humores oculi mouentur; at ex humorum motu, aliquando videbuntur sidera maiora, aliquando minora, aliquando magis lucida, aliquando minus lucida, aliquando vnius figuræ, aliquando alterius, sed hæc tremula & inconstans visio est scintillatio, & igitur sidera scintillant. ratio etiam evidens est cur Stellæ fixæ magis scintillent, quam alia obiecta; in Stellis enim fixis confusio est adeo notabilis, ut illius ope decies milles maiores videantur quam reuera sunt; quid ergo mirum si confusionum mutatio seu scintillatio in illis sit maxima. Sed contra hanc doctrinam obiiciet forte aliquis, a telescopiis male elaboratis maximam fieri visionis confusionem, sed non maximam scintillationem; respondeo istam confusionem, cum non fiat ab ipso oculo, ab humorum motu vix sensibilibiter mutari, & proinde istam scintillationem non esse valde sensibilem; quoniam scintillatio nil aliud est nisi confusionis mutatio, obiiciet fortasse adhuc illos qui oculi vitio laborant maximam percipere visionis confusionem, sed plerumque parvam vel nullam scintillationem; respondeo oculi vitium maxime ordinarium esse humorum immobilitatem, & sine humorum vel medii motu nulla potest fieri scintillatio.

QVOD SOL SIT REALITER, ET FORMALITER CALIDUS.

Hæc propositio facile potest deduci ex nostris opticae promotæ demonstrationibus; sed in hoc loco magis accurate & geometricè hanc ipsam probabimus.

PRO-

Per speculi vel lentis IOKN extremitatem, ex centro A fiat sphaera IONKH; item per punctum D ex eodem centro A fiat sphaera ERDSG, cuius superficiei portio a cono AIOKN superficie comprehensa, sit RESD. Quoniam sol ex omni parte æqualiter radiat, facile est deducere ex 6 definitione 5 elementorū omnes radios solares esse ad radios in speculū vel lentem IOKN incidentes, ut integra superficies sphaerica ad eius portionem IOKN: sed ex archimede de sphaera & cylindro, integra superficies sphaerica est ad eius portionem IOKN, ut quadratum diametri ad quadratum chordæ semissis arcus IK; & proinde omnes radii solares sunt ad radios in speculum vel lentem IOKN incidentes, hoc est radios in circulum MPLQ congregatos, ut quadratum diametri ad quadratum chordæ semissis arcus IK. Eodem modo probatur omnes radios solares esse ad radios in circulum DRES incidentes, ut quadratum diametri ad quadratum chordæ semissis arcus DE. sed quoniam arcus IK, DE, sunt similes, quadratum diametri circuli IKH eandem habent rationē ad quadratum chordæ semissis arcus KI, quam habet quadratum diametri circuli EDG ad quadratum chordæ semissis arcus ED; & ideo omnes radii solares eandem habent rationem ad radios congregatos in circulo LPMQ, quam habent iidem omnes radii solares ad radios congregatos in circulo RESD; sunt igitur radii congregati in circulo LPMQ æquales radiis congregatis in circulo DSER. Deinde ex constructione KI est ad LM ut KA ad DA; & ob similitudinem triangulorum KAI, DAE; KA est ad DA ut KI ad DE; & ideo LM, DE, sunt æquales; & igitur circuli LPMQ, DSER, sunt æquales: atque æquales radii in æqualibus spatiis eundem producant effectum; & proinde combustio in circulo DRES æqualis est combustioni in circulo LPMQ, quod demonstrandum erat.

CONSECTARIVM.

ATque ratione & experientia constat, quod, eadem speculivel lentis diametro IK manente, quo minor fuerit circulus combustionis $LPMQ$, eo maior sit combustionis violentia, nempe (ut nos alibi demonstramus) in circularum combustionis ratione reciproca: & quo minor est circulus combustionis $LPMQ$ vel illi æqualis $DSE R$, eo brevior est recta DA , seu puncti D à sole distantia, & e contra: ideoque quo propius accedit circulus $DSE R$ ad solem, eo maior in circulo est calor, seu combustio; & igitur Sol non est solum virtualiter, sed etiam formaliter calidus, quod demonstrandum suscepi.

*DE SOLIS HUMILIS ET SVBLIMIS
magnitudine apparente.*

ADmirantur nonnulli Solem humilem maiorem apparere etiam si instrumento astronomico observatus, e contra minor sit eius diameter apparens: quare minor plerumque sit eius diameter apparens prope horizontem quam in loco cœli elevatiore causa in promptu est, quæ à nullo astronomo ignoratur, nempe refraçtio quæ maior est inferioris limbi quam superioris; sed quare tunc nobis maior appareat conabimur hic explicare. Primo itaque sciendum est sensum communem indicare de visibilis magnitudine, sicuti faciunt geometræ, nempe ex cognitis distantia & angulo visorio, & ideo quo maiorem percipit sensus communis visibilis distantiam, eo cæteris paribus maiorem iudicat visibilis magnitudinem; sed dum Sol existit prope horizontem, iudicat sensus communis maiorem esse solis distantiam quam in loco Cœli elevatiore ob multa corpora interiecta; & ideo prope horizontem iudicat etiam eius magnitudinem

ma-

maio rem quam alibi, vbi corpora interiecta non videntur, & proinde de eius magna distantia iudicare non potest. Aliquando tamen ob nubes conuexas inter nos & solem interiectas apparet Sol etiam instrumento observatus, multo maior quam ordinario videtur, atque hoc euenit etiam quando Sol est sublimis, sed sæpius quando est humilis ob maiorem nubium frequentium. quæ hic diximus de Sole eodem modo intelliguntur de reliquis corporibus cælestibus.

DE VISIBILIVM PICTVRA *sub tecto obscuro.*

Intellektis illis quæ demonstraui mus de imaginis natura & loco, facile est percipere, quare pingantur visibilia illustrata in albis obscurati tecti parietibus, si pateat exiguum aliquod foramen in tecto obscurato radiis visibilium liberum præbens transitum. Vnumquodque enim visibilis punctum dirigit conum radiosum intra tectum obscuratum, cuius conivertex est visibilis punctum, & basis foramen illud exiguum, qui conus producit usque ad album & impositum parietis planum, illic aliam coni radiofi basem describens, à qua illi radii, ob plani inæqualitatem, vndique reflectuntur; cumque hæc coni radiofi in pariete basis oculo appareat sicut punctum opticum ob foraminis paruitatem, videbuntur omnes radii singulorum visibilis punctorum tectum ingressi a singulis parietis punctis diuergi; cumque hæc sit ipsa imaginis definitio, manifestum est in pariete esse visibilium imagines. Quod si foramen illud sit nimis largum, videtur imago illa confusa, quoniam radii singulorum visibilis punctorum non a punctis parietis opticis, sed a superficiibus sensibilibus diuerguntur. eodem modo si visibile foramen nimis appropinquet, conus productus basem describet in pariete non punctum opticum sed superficiem sensibilem; & ideo imago videtur confusa: idem etiam dicendum

dum esset si paries recederet a foramine . quæ hic loquutus sum de pariete , eodem modo intelligenda sunt de quocunque plano albo & impolito .

DE COMETARVM CAVDIS.

EXistimo plerosque huius seculi philosophos in hoc conuenire, quod cometarum materia sit corpus aliquod humidum ex vaporibus & exhalationibus terræ vel alicuius corporis cælestis genitum ; quare autem luceant eorum caudæ omnino controvertitur: existimo tamen hanc opinionem esse maxime receptam, nempe, quod radii solis per refractionem in cometes corpore post eius transitum vniti, caudæ lucentis efficiant similitudinem ; cui opinioni non subscribo ob hanc præcipue rationē demonstratiuam: omnis lucis vel coloris apparentia provenit à reflectione, sed hic nulla est reflectio, ergo ; probatur maior, si hic esset aliqua reflectio, esset reflectio radiorum ex cometæ corpore emergentium ab ipso æthere, sed ab æthere nulla potest fieri reflectio, ergo ; probatur minor, æther omnibus consentientibus est corpus maxime diaphanum (hoc est) radius omnibus a reflectione liberum præbens transitum . Hac igitur funditus eversa, novam stabiliamus sententiam : sed primo animaduertendum est solis absentiam in corporibus præsertim humidis & vaporosis crassas & opacas causari exhalationes, quas sua præsentia omnino dispellit : hoc enim nobis terræ incolis est notissimum ; nam tempore nocturno crassus ille aer ab omnibus sentitur, & minus validis præcipue aeris sereno assuetis sæpissime mortaliter nocet: at in zona frigida ob raram solis præsentiam ita sensibilibus increpescit aer, ut sæpissime illic obseruetur refraçtio horizontalis 4 vel 5 graduum, sicut a nautis batavis commemoratur. deinde considerandum est cometas ex omnium fere consensu esse corpora humida & maxime vaporosa, ex nebulis, fumis vel

exhalationibus genita, (vel fortasse corpus quodam humidum proprios suos vapores emittens & æthera semper pererrans absque vlllo motu circa axem) & ad solem eundem semper fere situm retinentia: hisce positis necessario sequitur medietatem cometæ soli adversam & ab illo nunquam calefactam nec illustratam crassis & valde opacis infestari vaporibus, qui a vaporosa illa cometæ materia & à se mutuo continuo nutriti, nulla vnquam (ob debilem & obliquam Solis lucem) facta ipsorum resolutione, in immensam altitudinem excrescunt, & solis radios non satis validos ad exhalationes dispellendas vndique reflectunt. in hac hypothefi istæ exhalationes à radiis Solis illustratæ in longum extensæ apparent sicuti cauda soli semper opposita, sed ob irregularem vaporum ex cometa elevationem, aliquando curvata, & aliquando in vnam, aliquando in alteram cæli plagam deflectens: sicuti eodem fortasse modo appareret in omnibus planetis, si omnes suas partes ad Solem vicissim vertendo, vapores vndique non dispellerentur a validis & directe incidentibus Solis radiis.

Luna existente plena; illustratio terra a Sole ad illustrationem terræ a Luna, est in ratione composita ex duplicata proportionem chordarum Parallaxium horizontalium Solis, ex terra globo, & ex Luna globo, obseruati; & ex duplicata proportionem chordæ graduum 90 ad chordam parallaxeos horizontalis Luna.

Vires (siue illustratio) omnium radiorum solarium in terram incidentium, ad vires omnium radiorum solarium in Lunam incidentium (si in æqualia spatia congregarentur) sunt in ratione duplicata chordarum semiangulorum radiosorum, seu in terminis astronomicis, in ratione duplicata chordarum parallaxium horizontalium Solis, ex terræ globo, & ex Lunæ globo, obseruati, vt in conspectuario 1. 33. optice promotæ est demonstratum. Sed quoniam luna

existente plena, eodem modo illustratur terra à Lunæ hemisphærio radiante, quo illustraretur si vndique radiaret luna; supponamus vndique radiari lunam: supponimus etiam lunam radios solares absque vlla debilitatione & ex omni parte æqualiter reflectere. his suppositis, evidens est vires omnium radiorum solarium in terram incidentium ad semissem virium omnium radiorum lunarium esse in ratione duplicata chordarum parallaxium horizontalium solis ex terra & ex luna, supposito semper vtriusque radios in æqualia spatia congregari: atque vires omnium radiorum lunarium sunt ad vires omnium radiorum lunarium in terram incidentium, in duplicata ratione chordarum, semicirculi & parallaxeos horizontalis lunæ, radiis scil. in spatia æqualia congregatis: & sumendo antecedentium dimidia, semissis viriū omnium radiorum lunarium est ad vires omnium radiorum lunarium in terram incidentium, in duplicata ratione chordarum 90 graduum & parallaxeos horizontalis lunæ: patent ergo sequentes analogiæ; vires omnium radiorum solarium in terram incidentium sunt ad semissem virium omnium radiorum lunarium, in ratione duplicata chordarum parallaxium solis ex terra & ex luna horizontalium; deinde semissis virium omnium radiorum lunarium est ad vires omnium radiorum lunarium in terram incidentium, in duplicata ratione chordarum 90 graduum & parallaxeos horizontalis lunæ, radiis semper in æqualia spatia congregatis: at radii solares & lunares in terram incidentes in æqualia spatia congregantur, nempe terræ hemisphæria. Supponatur quoque terræ hemisphærium a semisse omnium radiorū lunarium etiam illustrari, eruntque terræ hemisphæriorum, a radiis solaribus, a semisse omnium radiorum lunarium, & a radiis lunaribus sibi debitis, illustrationes, in eisdem rationibus cum viribus radiorum eadem hemisphæria illustrantium: proportionem igitur prædictam ita se habent; illustratio terræ a sole est ad illustrationem terræ a semisse radiorū

T

luna

lunarium, in ratione duplicata chordarum parallaxium horizontalium solis ex terra & ex luna; deinde illustratio terrę a semisse radiorum lunarium est ad illustrationem terrę a luna in ratione duplicata chordarum 90 graduum & parallaxeos horizontalis lunę: at illustratio terrę a sole est ad illustrationem terrę a luna, in ratione composita ex proportionem illustrationis terrę a sole ad illustrationem terrę a semisse radiorum lunarium, & ex proportionem illustrationis terrę a semisse radiorum lunarium ad illustrationem terrę a luna; quę proportionem eędem demonstratę sunt cū duplicata proportionem chordarum parallaxium horizontalium solis ex terra & ex luna, & duplicata proportionem chordarum 90 graduum & parallaxeos horizontalis lunę, quod demonstrare oportuit.

Eodem prorsus modo demonstratur hoc generale Theorema.

Quolibet planeta existente pleno; illustratio vel calefactio terra a Sole est ad illustrationem vel calefactionem terra ab illo planeta, in ratione composita ex duplicata ratione chordarum, parallaxium horizontalium solis, ex terra & ex prædicto planeta observati, & ex duplicata ratione chordę graduum 90 ad chordam parallaxeos horizontalis illius planeta.

DE STELLARVM FIXARVM DISTANTIA.

IN stellis fixis nulla observari potest parallaxis; & ideo de earum distantia multa absque ullo fundamento dicuntur; ego certe existimo illam esse maximam, neque fortasse absque omni ratione, sicut nunc patebit.

Certum est terram & omnes planetas esse corpora obscura & aliena sola luce fulgentia, item solem & omnia sidera fixa esse lucida & proprio tantum fulgore splendentia; hæcenim ex multis & certissimis phænomenis sunt manifesta. Cumque Sol & stellę fixę sint sola uniuersi corpora lucida,

eida, eiusdem generis censerī possunt; ita ut Sol quodam-
 modo dici possit stella fixa vicina; & stellæ, soles longinqui:
 hisce consideratis non erit probabile nostram stellam fixam
 vicinam, seu Solem, inter tot millia esse omnium fixarum ma-
 ximam & lucidissimam; possumus igitur haud absurdè affir-
 mare unam saltem stellam fixam (nempe syrium, quæ nobis
 omnium maxima & lucidissima apparet) ipsum solem & in
 splendore & magnitudine æquare: atque syrius in splendo-
 re inferior est Ioui in situ acronychio, sed ut evidentius fiat
 nostrum propositum, supponamus lucem syrii luci Iouis esse
 æqualem: sed lux solis est ad lucem Iouis in situ acronychio
 in ratione composita ex duplicata ratione chordarum paral-
 laxium horizontalium solis ex terra & ex Ioue observati, &
 ex duplicata ratione chordæ graduum 90 ad chordam paral-
 laxeos horizontalis Iouis, ut patet ex antecedente; & ideo
 lux solis est ad lucem syrii in eadem ratione: parallaxis au-
 tem solis horizontalis ex terra observati secundum pleros-
 que est $3'$: & semidiameter apparens Iouis in situ acrony-
 chio (hoc est parallaxis horizontalis terræ ex Ioue in situ
 acronychio observatæ) est $22''$; cumque in hoc situ distan-
 tia terræ a sole ad distantiam Iouis a sole vulgo sit ut 10 ad
 52; erit distantia solis a Ioue ad distantiam terræ a Ioue, ut
 52 ad 42; & proinde horizontalis parallaxis solis ex Ioue
 observati est $18''$; cumque in parvis angulis arcus inter se
 sint ut chordæ, chorda parallaxeos horizontalis solis ex ter-
 ra observati ad chordam parallaxeos horizontalis solis ex
 Ioue observati est in ratione $3'$ ad $18''$, seu ut 180 ad 18 vel ut
 10 ad 1, cuius ratio duplicata est 100 ad 1. deinde chorda
 graduum 90 (posito radio 100000) est 141421: cumque di-
 stantia Iouis a Sole ad distantiam terræ a Sole sit in ratione
 52 ad 10 & Solis parallaxis horizontalis sit $3'$, manifestum
 est Iovis parallaxem horizontalem esse $35''$, cuius chorda est
 17, posito etiam radio 1000000; & ideo chorda graduum
 90 est ad chordam parallaxeos horizontalis Iovis ut 141421

ad 17 seu ut 83190 ad 1, cuius ratio duplicata est 69205761 ad 1; illustratio igitur terræ a Sole est ad illustrationem terræ a Syrio in ratione cōposita ex proportionē 100 ad 1 ex & proportionē 69205761 ad 1, hoc est in ratione 6920576100 ad 1; cumque Sol & Syrius supponantur esse eiusdem magnitudinis & splendoris, manifestum est illustrationem terræ a Sole ad illustrationem terræ a Syrio esse in duplicata ratione chordarum semiangulorum radioforum Solis & Syrii in terram, hoc est parallaxium Solis & Syrii ex terra horizontalium; & ideo chorda parallaxeos horizontalis Solis est ad chordam parallaxeos horizontalis Syrii in subduplicata ratione 6920576100 ad 1, seu in ratione 83190 ad 1, sed in his parvulis angulis chordæ inter se sunt ut sinus, sinus ergo parallaxes horizontalis solis est ad sinum parallaxeos horizontalis Syrii, ut 83190 ad 1, sed Sol & Syrius eiusdem supponuntur magnitudinis, & ideo eorum distantie à terra inter se sunt in reciproca ratione sinuum parallaxium horizontalium; & proinde distantia Syrii a terra ad distantiam Solis a terra est ut 83190 ad 1; & ideo distantia Solis a terra ad distantiam Syrii à terra non est in ratione sensibili, quod demonstrare oportuit.

Quod si assumatur parallaxis horizontalis Solis minor quam 3' (certissimum enim est eam minorem esse vno minuto) magis adhuc insensibilis erit dicta proportio: Nos autē non existimamus omnes fixas æqualiter distare a Sole, nam probabile est quarundem distācias aliarum multis vicibus superare. Existimet forte aliquis meum argumentum non concludere, quoniam fortassis omnes radii solares in Iovem incidentes ab eo non reflectuntur, sicut ego suppono: respondendo tamen argumentum esse à fortiore, quo enim pauciores supponuntur radii a Iove reflecti, eo magis insensibilis erit prædicta proportio, ut cuius computanti patebit.

QVOD VISIO OPE TELESCOPII
vel microscopij non sit fallax.

R Erum opticarum non satis periti semper exclamant
 telescopia & microscopia visum solūmodo decipere &
 nihil verum & reale nobis monstrare, neque evidentissimis
 experiētiis omnino convinci possunt; & igitur ratione ten-
 tandum est illos ad veritatem revocare. Visus fallacia po-
 test duobus modis accipi, primò & valde improprie, quan-
 do visibile eodem modo videtur in vna distantia, quo in alia
 videri debet; hoc enim absolute non potest dici visus falla-
 cia, etiamsi respectiue ad istam distantiam ita dici poterit, in
 alia enim distantia est vera & debita visio: atque in hac ac-
 ceptione visio per telescopium vel microscopium omnino
 est fallax. Secundo & propriè, visus fallacia est quando vi-
 sibile vel eius pars aliqua non apparet in propria sua figura,
 situ, & propriis suis coloribus tinctum: atque in hac acce-
 ptione nulla inest fallacia visioni per telescopium vel micro-
 scopium perfectum, quæ hominis visioni perfectissimæ non
 inesse potest: in 50 enim & 51 optica promota geometricè
 demonstratur, quod omnis visio per lentes vel specula, sit
 visio vera & realis in tali assignata distantia nudo oculo de-
 bita; si igitur nulla sit fallacia in visione oculi nudi, nec vlla
 erit in visione per telescopium vel microscopium, cum illæ
 visiones demonstrantur esse eædem. Sed dicet forte aliquis
 telescopium vel microscopium repræsentare aliquando visi-
 bile in situ everso, sed oculus ita nunquam facit, ergo: re-
 spondeo in hoc casu telescopium vel microscopium repræ-
 sentare visibile eodem modo quo appareret oculo nudo &
 everso in tali assignata distantia, ut facilè videtur ex 50 &
 51 opt. prom: siue enim obiecti, siue oculi eversio, nihil mu-
 tat, præter merum situm quo ad nos, nec in visione nec in
 visibili.

QVOD

QVOD OMNE VISIBILE IN
infinitum sit divisibile.

SI visibile in infinitum non sit divisibile, accipiat minima eius pars, quæ ex opt: prom: 55 vel 56 oculo repræsentetur in angulo aliquo visorio sensibili ex. g. 20 graduum; atque oculus percipit visibile in angulo visorio 20 graduum in multas partes divisibile, & proinde apparet hæc minima visibilis pars oculo in multas partes divisibilis; cumque natura homini non det oculos fallaces, & nec telescopium nec microscopium visum præbeat magis fallacem quam ipse oculus; necessario sequitur quod ista minima pars sit realiter divisibilis, quod est absurdum, ponitur enim indivisibilis; & igitur non potest dari visibilis pars minima, est igitur omne visibile in infinitum divisibile, quod demonstrare oportuit.

DE OBSERVATIONE SIMILITVDI-
nis inter Terram & Lunam.

Hæc temporibus magna est controuersia, num Lunæ globus sit ex terra & aqua, sicut noster hic globus terrestris; quæ facili experientia sit dirimi potest. Sit telescopium cuius lens obiectiua in latitudine ad minimum continens centies diametrum uveæ obseruatoris, ex vna parte plana & ad alteram convexa ex diametro 30 palmorum; sitque eius ocularis plana ex vna parte & ex altera $\frac{1}{2}$ palmi

convexitatis. Huius telescopii ope videbitur Luna (supposita eius à terra distantia 240000 mille passuum) omnino sicut ex distantia 2400 mille passuum. Deinde in loco aliquo eminentissimo (ex quo videri possunt maria, montes, prata, lacus, saxa, omnia vastissima, ad distantiam 40 mille passuum) & sub tecto vasto ad ultimum obscurato, dempto vno so-
lum-

lummodo parvo foramine versus prædicta maria, montes, &c. a descripi telescopii lente oculari impleto, per quam obseruentur antedicta maria, montes, &c. (dum à Sole fortiter illustrantur) ab oculo 61 palmis distante à lente, videbuntur omnino sicut ex distantia 2400 mille passuum, ex qua etiam distantia videbatur Luna; & proinde similitudines & dissimilitudines inter Lunam & Terram ab obseruatoribus videri poterunt. Huius præcos demonstratio est ex optica promotæ 30 & 51; ex illis enim deducitur æqualis distantia & illustratio distantie debita veriusque visibilis, & est in utroque aliqua vitri tinctura. Sed dicet aliquis lunam hac ratione plus habere tincturæ vitreæ quam terra, quoniam illius radii duo penetrant vitra, huius vero solummodo, vnum; cui facile medetur, addendo in observatione terræ vnum vitrum ex vtraque parte planum eiusdem cum lente telescopii obiectiua crassitiei, ad alteram lentem ex parte plana iunctum; dicet adhuc aliquis vapores terrestres, vel terræ obseruationem omnino impedire, vel saltem eius colores mutare: respondeo quod terra obseruari debeat e loco altissimo & tempore sereno, & Luna dum prope horizonem existit, vt idem semper in vtraque obseruatione defectus adlit. hisce consideratis, si luna appareat terra splendidior; dicendum est Lunam terra esse candidiorem & omnino opacum, quoniam nigredo & diaphaneitas reflectionis vires impediunt: Si vero contrarium videatur, contraria ferme sunt iudicanda: si eadem in vtraque obseruatione appareant phænomena, nulla ratio nos docet telluris & Lunæ materias esse diuersas. Eadem quoque methodo potest experientia fieri de similitudine inter duos quoslibet planetas, inter Solem & Stellaras fixas, inter nubes & cometas.

F I N I S.

100.350